ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学
SGCライブラリ
121

For Senior & Graduate Courses

対称性の自発的破れ

基礎からランダウ理論,南部理論,
標準模型,ヒッグス粒子まで

菅本 晶夫・曺 基哲　共著



サイエンス社

SGC ライブラリ-121

対称性の自発的破れ

基礎からランダウ理論，南部理論，
標準模型，ヒッグス粒子まで

菅本晶夫・曺基哲 共著

サイエンス社

まえがき

本書「対称性の自発的破れ」の執筆をサイエンス社 数理科学編集部から依頼されたのは 3 年前の 2012 年 8 月のことであった．基礎的な前半部を菅本が担当し，最新の話題を含む後半部を青が担当することとしてお引き受けした．

予備知識は微分積分と行列のかけ算のみとし，物理学を学ぶためのエッセンスを丁寧に説明することによって，志ある中学生や高校生にも読めるような本にしたいと考えた．従って統計力学や量子力学もなるだけ噛み砕いて説明するように心掛けた．

「対称性の自発的破れに関するエッセンス」はランダウと南部によって明らかにされたと筆者は考えていたので，この 2 人の巨人の原論文を理解しようと読み始めたが，先ず最初にランダウの 1937 年の論文を読んで目が眩み完全に自信を喪失した．それで前半担当の菅本はその後遅々として筆が進まなくなった．しかし 2 年強の歳月と担当の平勢氏の暖かい励ましと絶妙の手綱さばきによって，2015 年の春頃から筆が動き始めた．その矢先の 6 月になって筆者が大変お世話になった南部陽一郎先生の病が重篤であるとの連絡が入った．駆けつけたが残念ながら面会謝絶で先生には会えず，智恵子夫人とシカゴ時代の懐かしい思い出話を長時間した．我々の願いは届かず南部先生は 7 月 5 日に逝去された．ちょうどその時期に南部理論を BCS 理論と比較しながら執筆していたので，運命を感じて BCS 理論と南部理論の説明に思いがけず力が入った．これが第 4 章の 4.1 節～4.3 節である．先生が逝去された後のお盆休みに智恵子夫人と再び先生の思い出話をした．夫人は先生の後を追うように 9 月 23 日に逝去された．お二人とも 94 才であった．とても仲の良いご夫婦であった．

1960 年代前半以前を扱った前半部とは異なり，1960 年代後半以降を扱った後半部は「対称性とその破れの概念」がどのように素粒子物理学に影響を与えたかの現代的な解説となっている．素粒子の標準模型を解説して理論的知識を蓄えた後に，それが実験によってどのように検証されたか，更には 2012 年にスイスの CERN（ヨーロッパ素粒子原子核研究所）にある LHC（Large Hadron Collider）加速器を用いて発見された，物質の質量の起源に関わる「ヒッグス粒子」の探索実験の概要を解説した．紙数の関係で，標準模型を越える「超対称性模型」を議論し，超対称性の破れとその実験的検証を記載することができなかったことが心残りである．

本書は次のように利用することができる．

1. 志ある中学生・高校生：第 1 章～第 3 章を中心に読む．この 3 つの章が突破できれば残りの章も必ず理解できるだろう．
2. 大学生：第 2 章は復習だと考えてさらっと読み飛ばして，残りを興味に従って取捨選択して読む．
3. 大学院生：第 4 章の 4.5 節以降か，あるいは第 5 章～第 8 章を読む．

4. 研究者：第 7 章と第 8 章を読む.

本書を著すにあたり，山下公子さんをはじめとするお茶の水女子大学素粒子論研究室の皆様に，原稿に対してコメント頂くなど大変お世話になった．またサイエンス社数理科学編集部の平勢耕介氏には筆が遅々として進まない著者を原稿完成まで忍耐強く導いていただいたことに感謝したい．

最後に本書を「対称性の自発的破れを普遍的な概念」として提唱された，筆者が敬愛する「南部陽一郎先生と智恵子夫人の霊」に捧げる．

2015 年 10 月

菅本晶夫（Akio Sugamoto），曺基哲（Gi-Chol Cho）

目　次

第 1 章
対称性を理解する方法

対称性を理解する方法としてガロアによって導入された「群」という概念を説明し，平面に書かれた正方形と長方形を不変にする群を調べる．そして正方形から長方形に微小変形する場合に，図形の持つ対称性がどのように破れるのかを「群の言葉」を用いて調べる．

1.1 正方形の対称性とそれを表す群

対称性とは，ある図形が持っている規則性のことである．例えば一辺の長さが 2 cm の正方形（square）を考えてこれを図示して見よう．正方形の頂点を図 1.1 のように A, B, C, D とし，A と B，B と C，C と D，D と A の中点をそれぞれ E, F, G, H としよう．2 次元の座標軸を書き入れると，2 次元平面上の点を座標 (x, y) で表すことができるので便利である．座標の原点を O とする．正方形にはその形に対応した対称性がある．E と G を結ぶ線 $\overline{EG}$ を境として左右を入れ替えたとしても元の正方形に戻る．同じことは，F と H を結ぶ線 $\overline{FH}$ を境として，正方形の上下を入れ替えても元に戻る．A と C を

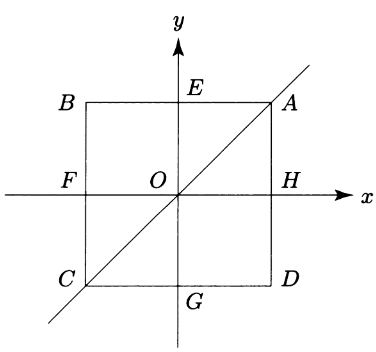


図 1.1

結ぶ線 $\overline{AC}$ や B と D を結ぶ線 $\overline{BD}$ を境としてその両側を入れ替えても同じように元の正方形に戻るだろう．このように，図形にある操作を施して元の図形に戻るかどうかを考えると，その図形が持っている規則性，即ち「対称性 (symmetry)」が見えてくる．

他に元の図形に戻る操作があるかどうかを考えるために，O を中心とする半径 $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ の円を描いてみよう．この円は正方形に外接する．O の周りに正方形を $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ 回転させても正方形は元の形に戻る．これで正方形を特徴づける対称性が理解できたことになる．向かいあった辺の中点を結ぶ線に対して左右を入れ替える変換，これはその線上に鏡を置いて，図形を鏡に映った図形へ変換することに相当するので，「鏡映変換 (mirror reflection)」と呼ぶことにすれば，正方形は辺の中点を結ぶ線に対する 2 種類の鏡映変換で元の形に戻る．更に向かい合った 2 つの頂点を結ぶ 2 種類の線に対して鏡映変換を行うと，元の形に戻ることも分かる．外接する円の中心周りで回転させることを「回転 (rotation)」と呼ぶことにすると，正方形は $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ 回転で元の形に戻る．元の形に戻るならば元と変わらないので「不変 (invariant)」ということにすると，正方形は 4 つの鏡映変換と 4 つの回転変換で不変な図形ということになる．このように図形を不変とする変換を調べると，対称性が理解できるのである．

次に変換の操作が「群 (group)」を作ることを説明しよう．上記の例のように，線 $\overline{EG}$ を境にして鏡映変換を行う操作を $m(EG)$ としよう．m は mirror-reflection から採った．正方形を $S(ABCD)$ とする．正方形の英語名 square の S を使った．図形に 1 つの操作を行って得られた図形を，元の図形を右に，操作を左に書くことにすると

$$S(BADC) = m(EG)S(ABCD) \tag{1.1}$$

となる．左辺を $S(BADC)$ とした気持ちは分かるだろうか．鏡映変換をすると $S(ABCD)$ は $S(BADC)$ に変換されるけれど，正方形としてこの両者は同じものであるので，正方形はこの鏡映変換で不変である．一般の図形 X（「一般」という場合にはどんな図形でもよい）に鏡映変換 m を行っても元に戻らないので，

$$X' = mX \tag{1.2}$$

としたとき，変換後の図形 X' は X と等しくならず，図形 X は変換で不変ではない．しかし m を 2 回続けて行ったらどうだろうか．行う操作は，操作するごとに左から掛けることにしよう．その結果得られる図形を X'' とすると

$$X'' = mmX = m^2X \tag{1.3}$$

となる．X'' は元がどんな図形であっても元の図形 X に戻る．つまり鏡映変

換を2回行う操作は，図形を変化させない変換である．この図形を変化させない変換を「恒等変換（identity)」と呼ぶことにする．恒（つね）に等しく，変化しない変換である．これを記号で1と書くことにすると，

$$m^2 = 1 \tag{1.4}$$

である．従って，鏡映変換を何度かくり返す変換の集まり $\{m, m^2, m^3, \ldots\}$ は，1と m の2種類の変換から成る集まりとなる．この集まりを「羊の群れ」のように考えて，「群（group)」（「ぐん」と発音する）と呼ぶ．英語の group は分かり易い．「群」はエヴァリステ・ガロア（Evariste Galois）が考案したものである[1]．群は1831年に発表された「方程式が根号を用いて解けるための条件についての論文」において，ガロアによって導入された数理科学における最も基本的な概念である．

先ず「群の定義」を書いてみよう．定義というと堅苦しいが，きちんとその意義を定めようということで，英語では definition という．

群 G の定義： 群 G を構成する「要素」(elements) を $\{g_1, g_2, g_3, \ldots\}$ とする．要素を「元」とも呼ぶ．英語名は要素でも元でもおなじ element である．2つの要素（2つの元）の間には積（かけ算）が定義されている．g_1 と g_2 の積を $g_1 \cdot g_2$ と書く．このとき積（かけ算）の順序も重要である．$g_1 \cdot g_2$ と $g_2 \cdot g_1$ が等しいかあるいは異なるかは，どのようなかけ算を考えるかによって異なるからである．結果がかけ算の順序によらない場合をアーベル群（Abelian group)，かけ算の順序によって答えが異なることがある場合を非アベール群（non-Abelian group）と呼ぶ．数学者アーベル（N.H. Abel）の名前を冠しているのである．かけ算の結果得られた $g_1 \cdot g_2$ あるいは $g_2 \cdot g_1$ は必ず群 G の要素であることを要請する．つまりかけ算をした結果得られる元が再び G の中にあるので，G の要素の間では積（かけ算）が自在に行えることになる．これが重要なポイントである．

次に3つの元の積は $g_1 \cdot g_2 \cdot g_3$ である．このときどの順序でかけていったらよいのか悩むだろう．$g_1 \cdot g_2$ を先に行うのか，あるいは $g_2 \cdot g_3$ を先に行うかという問題である．どの順序でかけても結果が同じであるならば楽である．だから $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$ が成り立つと要請するのである．この規則を「結合則（associativity)」という．結合の順序によらず結果は同じであるという規則である．（この結合則が成り立たない場合も，今後重要となるかもしれない．結合則は行列演算と親和性がある．一方行列を越えた数学を考えようとすると結合則を破らなければならない．この辺から新しい数学が誕生する可能性がある．）

更に群 G の要素の中に特別な元，「単位元（identity)」があることを要請する．この元を1と書く．単位元とは，G の任意の元 g に対して，

$1 \cdot g = g \cdot 1 = g$ が成り立つものである．よく「任意」という言葉を使うが，これは any あるいは arbitrary という意味で，「意に任せて」自由に選んでよいという意味の言葉である．

最後に要請するのは「逆元（inverse)」の存在である．任意の元 g に対して，逆元 g^{-1} が必ず存在し，$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$ が成り立つ．つまり g という操作を逆に引き戻す操作 g^{-1} が，必ず G に存在するとするのである．

参考のために群の定義を数学的に書いてみよう．

Definition of group: A set G is called group, if it satisfies the following four conditions:

1) A product $g_1 \cdot g_2 \in G$ is defined, for $\forall g_1, g_2 \in G$.

2) $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$ holds for $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$.

3) $\exists 1$ s.t. $1 \cdot g = g \cdot 1 = g$ for $\forall g \in G$.

4) $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ s.t. $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$.

日本語よりも英語の方が書き易かったのでそうにしてみた．意味は分かると思う．記号に関して補足すると，$\in$ は「... に属している（in)」，$\forall$ は「任意の (for all)」であり，$\exists$ は「存在する（exists)」を表し，s.t. は such that の略である．「set」というのは要素の集まりのことで日本語では「集合」という．数学とは概念を明確化し，これをできる限りシンプルに表現しようとする学問分野である．

さて元の正方形の対称性の問題に戻ろう．ある線に対する鏡映変換は，$\{1, m\}$ の 2 つの元から作られる群である．かけ算すると 1 あるいは m のいずれかになることは $m^2 = 1$ から分かる．単位元 1 は存在し，m の逆元は m である．結合則が成り立つことも分かるだろう．集合 $\{1, m\}$ は，変換を行うときに左からその操作をかけることにすれば，それが群の積を与えることになっている．回転はどうだろうか．座標軸の原点の周りで図形を左に 90° 回転する操作を r と書くことにすると，回転の操作は，$\{1, r, r^2, r^3\}$ の 4 つの元からなる群であることが分かる．実際左回転を n 回行う操作は r^n である．r の逆元 r^{-1} は右に 90° 回転する操作である．従って右回転も考慮に入れると回転操作の全体は $\{r^n; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ となる．しかしこのとき 360° 回転すると元に戻るので，360° 回転の操作は単位元 1 である．すると r の逆元である r^{-1} は r^3 と同じになる．r^2 の逆元は r^2 自身なので，結局 $\{1, r, r^2, r^3\}$ は 4 つの元の集まりから成る群となる．但し 90° 回転には，$r^4 = 1$ という条件が付いていることを，常に頭の片隅に入れておかなければならない．

さて正方形の形を不変にする変換を集めてみよう．1) 恒等変換：1．2) 向かい合った辺の中点を結ぶ線に対する鏡映変換：$m(EG)$ と $m(FH)$．3) 向かい

合った頂点を結ぶ線に対する鏡映変換：$m(AC)$ と $m(BD)$．4) O 点周りの回転：r, r^2, r^3．問題はこれで正方形を不変とする変換が全部尽くされて，正方形の形を不変にする「正方形群」は，上記の 8 種類の元から構成される群であるかどうかである．このことは色々とかけ算を行って見て，他の元が現れないことを確認して理解することで満足しよう．この群は通常「正 2 面体群（D_4）」と呼ばれている．

もう少し具体化するために，最低限いくつの元があれば，残りの元をそれらの積で再現できるか（生成できるか）を考えてみよう．r から $\{1, r, r^2, r^3\}$ は生成できる．次に 4 つの鏡映変換から 1 つ m を選ぶ．例えばこれを $m(EG)$ として，r と m の 2 つを色々とかけてみよう．その結果，$\{m, mr = m(AC), mr^2 = m(FH), mr^3 = m(BD)\}$ が 4 つの鏡映変換を全て与えることが分かる．従って，

$$G = \text{正方形群} = \{1, r, r^2, r^3, m, mr, mr^2, mr^3\} \tag{1.5}$$

である．ただし r が $90°$ 回転であり，m と mr が鏡映であることから，$r^4 = m^2 = (mr)^2 = 1$ を忘れてはならない．

1.2　対称性の破れ：正方形から長方形への微小変形

さて正方形の縦がほんの少し（0.01 cm）縮み，横がほんの少し（0.01 cm）伸びたとしよう．正方形の面積はほとんど変わらない．ほんのわずかの変化ではあるが，対称性は大きく変化する．正方形（square）が長方形（rectangular）に形を変えるからである．長方形でも向かい合った辺の中点を結ぶ線に対する鏡映変換不変性は残るが，向かいあった頂点を結ぶ線に対する鏡映変換不変性は破れることになる．180° 回転に対する不変性は残るが，90° と 270° の回転に対する図形の不変性は破れる．即ち形を微妙に正方形から長方形に変えたあとでは，図形の対称性を表す「H=長方形群」は

$$H = \text{長方形群} = \{1, r^2, m, mr^2\}, \tag{1.6}$$

となり，元の数が 4 つの小さい群になる．

このとき「対称性が破れた（symmetry is broken）」という．そのとき対称性を表す群は，正方形群 G から長方形群 H に壊れて（破れて）小さくなる．H は G の一部分であり，それ自身で群であるので，H を G の「部分群（subgroup）」という．対称性が破れると，対称性を表す群 G はその部分群 H に壊れるのである．対称性の破れを，対称性の背後にある群がその部分群へ壊れる現象として理解した最初の人は，エリ・ランダウ（L.D. Landau）であり，1937 年に書かれた論文「On the theory of phase transition」においてそのことを明らかにした[2]．この論文によって，系（システム）の対称性が破れることに起因す

る「相転移（phase transition）」は，完全に理解されたといっても過言ではない．われわれは次章において力学系の記述方法を学んだのちに，第 3 章において「力学系における対称性とその破れ」を考察し，ランダウの考えに少しでも近づくことにしよう．

第 2 章
力学系の記述方法

前章では，正方形や長方形といった図形の形に関する対称性を調べた．われわれがこの著書で考察したい問題は，分子や原子の集まりあるいは素粒子の集まりといった粒子の間にさまざまな力（粒子間で互いに力を及ぼし合うので「相互作用（interaction）」と呼ぶ）が働いている系の対称性とその破れである．このような系は「力学系（dynamical system）」と呼ばれる．

力学系において，系の規則性，即ち系の対称性を記述するにはどんな物理量を用いれば良いだろうか．直ぐに思い浮かぶのは「エネルギー（energy）」である．系のエネルギーが，対称性を記述する変換の集まりである群の操作を施したときに不変ならば，系はその対称性を持つといってよいだろう．これを式で書いておこう．物理でエネルギー（E）というときには，エネルギーの値自体を考えることが多い．エネルギーという値を取る物理量を表すときには「ハミルトニアン（Hamiltonian）」（H）という言葉を用いる．ハミルトニアンという物理量の値がエネルギーであると考えるのである．Hamiltonian は Hamilton という数学者の名前を形容詞にしたもので，これを名詞として用いる．「ハミルトンの考えた物理量」という意味合いである．群 G の操作をハミルトニアン H に施して不変であることを

$$H^G = H \tag{2.1}$$

と書こう．

われわれは，力学系を記述する方法を知らなければならない．この章では極めて多数の粒子から構成される巨視的な力学系を扱う「統計力学（statistical mechanics）」と，微視的な力学系を記述する「量子力学（quantum mechanics）」を説明する．予備知識は必要としない．この 2 つの理論を説明する前に，指数関数と対数関数とともにオイラーの公式を復習する．統計力学と量子力学は，指数関数と対数関数の性質およびオイラーの公式を基に構成されているからである．

2.1 指数関数，対数関数，三角関数とオイラーの公式

指数関数と対数関数には次の性質がある．即ち

$$e^{(x+y)} = e^x \cdot e^y, \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \tag{2.3}$$

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}. \tag{2.5}$$

ここで e は自然対数の底と呼ばれる定数で，値は $2.71828\cdots$ であり，次の極限として定義される．

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.6}$$

この定義を用いると (2.2) 式は簡単に証明できる．以下では (2.3) 式の証明をしてみよう．微分の定義をそのまま書くと

$$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{\varepsilon\to 0}(e^{x+\varepsilon}-e^x)/\varepsilon = e^x\lim_{\varepsilon\to 0}(e^\varepsilon - 1)/\varepsilon = e^x, \tag{2.7}$$

であり，最後の等式は e の定義を用いると

$$\begin{aligned} e^\varepsilon &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\varepsilon} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+n\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n\varepsilon(n\epsilon-1)}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots\right) \\ &= 1+\varepsilon \end{aligned} \tag{2.8}$$

となるので理解できるだろう．上記において $n\epsilon$ をあたかも自然数のように考えて展開を行ったがこれは許される．もっと厳密にしたければそれが可能だからである．対数関数は指数関数の逆関数であること，即ち

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \tag{2.9}$$

から，式 (2.4), (2.5) を示すことができる．指数関数は exponential，対数関数は logarithm と呼ばれる．上記の関係式で定義される対数関数は e を基にした（底とする）自然対数関数（logarithm naturale）であり，ln と記述される．指数関数と対数関数を用いると，足し算とかけ算を自由に行き来させることができることがポイントである．

次にオイラーの公式を説明しよう．これは数学者 L. Euler が発明した驚くべき公式である．指数関数と三角関数が複素数を用いるとつながるというものである．公式は x を実数としたとき，

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \tag{2.10}$$

と書ける．ここで i は $\sqrt{-1}$ を表す「虚数単位 (imaginary unit)」である．この公式を証明しよう．右辺を $f(x)$ と置くと，三角関数の加法公式を用いて $f(x+y)=f(x)f(y)$ が証明できる．この関係式を満たす関数は，ある数 A のべき関数 A^x 以外にはないだろう．従ってある数 γ を用いて

$$f(x)=e^{\gamma x} \tag{2.11}$$

と書くことができる．この γ が i であることを示せばよい．そのためには上式の両辺を微分すると

$$\frac{d}{dx}f(x)=\gamma f(x) \tag{2.12}$$

となることに注目しよう．これは式 (2.3) から得られる．逆に指数関数とは，「微分方程式（微分を含む方程式，differential equation）」(2.12) 式によって特徴づけられる関数であるといってもよい．この微分方程式は自然界のあらゆるところに現れる最も重要な方程式である．さて $f(x)$ はオイラーの公式の右辺であったので，三角関数の微分を用いて $f(x)$ の微分を計算すると，$\gamma=i$ であることが分かる．以上でオイラーの公式が証明されたことになる．

念のため，三角関数も少し復習する．$\sin\theta$ と $\cos\theta$ と書いたときの変数 θ とは何かをしっかり理解しておく必要がある．図 2.1 のように半径 1 の円と一緒に扇形 OAC を描いてみよう．C を円と x 軸の正の部分との交点とする．このとき角度 θ を円弧 AC の長さに等しく取るのである．これが「ラジアン (radian)」を単位とする角度の表し方である．扇形 OAC として角度を見ると円弧の長さは正確に角度を表していることが分かるだろう．従って 360° がラジアンでは円周の長さ 2π になる．三角関数の微分の以下の公式は，変数 x をラジアンで表した場合にのみ成り立つ公式であるが，この確認は読者に任せよう．

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x, \tag{2.13}$$
$$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x. \tag{2.14}$$

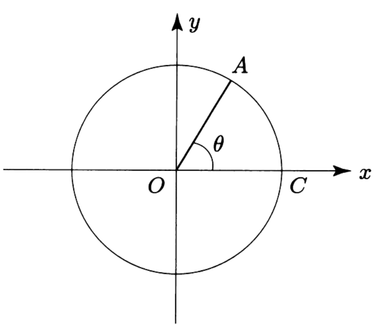


図 2.1

2.2 統計力学

次に統計力学を説明しよう．これは極めて多数の分子や原子の集まりから構成された現実の物質を確率統計を用いて取り扱う方法である．現実の物質の原子や分子の粒子数 N はアボガドロ数：$N_A = 6.02214... \times 10^{23}$ に比べてずっと大きいだろう．例えば 2 g の水素ガスは水素原子 (H_2) が N_A 個集まってできた物質である．数が極めて大きいので確率的に議論をすることになる．考えている力学系が，温度 T の熱浴（heat bath）に接しているとする．考えている力学系を試験管に入れてこれを温度 T の水槽に浸している状況である．これを温度 T の熱浴（お風呂のようなもの）に接しているというのである．この力学系がエネルギー E_i の状態に存在する「確率（probability)」Pr_i は

$$Pr_i \propto e^{-\beta E_i}, \tag{2.15}$$

$$\text{ここで}\quad \beta = 1/k_B T \tag{2.16}$$

で与えられる．これを「ボルツマン（Boltzmann）の原理」といったり，「ギッブス（Gibbs）分布」といったり，「カノニカル分布（canonical distribution, 正準分布)」といったりする．ボルツマンとギッブスは統計力学の創始者である．考えている系は巨視的なものなので，その系を構成しているアボガドロ数を越える数の分子が持っているそれぞれのエネルギーを足し合わせると全体としてエネルギーが E_i になるということなので，各分子のエネルギーは様々な値を取り得るだろう．つまり微視的に見ると力学系は様々な状態を取っていると考えられる．

先ず (2.15) 式はとても好都合な表式であることを述べよう．今温度 T の熱浴に接している系が系 I と系 II の 2 つあったとしよう．温度が同じなのだから系 I と系 II を接触させても熱の移動はなく安定するので，これを $I+II$ の合成系 III としよう．系 III の存在確率は，系 I が存在した上に系 II が存在するのだから，

$$Pr_{III} \propto Pr_I \cdot Pr_{II} \tag{2.17}$$

のように，それぞれの系の存在確率の積となる．ここで指数関数の性質 (2.2) を思い出すと，これは

$$E_{III} = E_I + E_{II} \tag{2.18}$$

と等価であることが分かる．つまりエネルギー保存則を満たすような確率は (2.15) の形以外にはあり得ないのである．但し係数の β は熱浴の温度で決まることは分かるが絶対温度の逆数に比例するかどうかは自明ではない．しかし温度とは系を構成する分子が持つエネルギーの平均値であるとするならば，温度にエネルギーの単位に換算する定数であるボルツマン定数 k_B をかけて，エ

ネルギーと同じ単位とした後に，次元を持たない E/k_BT の組合せとして指数関数の肩に現れることは理解できるだろう．ちなみにボルツマン定数は，

$$k_B = 1.38065\cdots\times 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \tag{2.19}$$

$$= 0.86173\cdots\times 10^{-4}\,\mathrm{eV/K} \tag{2.20}$$

である．J はジュール（Joule），K は絶対温度の単位であるケルビン（Kelvin），eV は電子が 1 ボルト（Volt）の電位差を通過するときに得るエネルギー単位で，electron Volt である．k_B の値を大雑把に

$$k_B \approx 1\,\mathrm{eV}/10^4\ \mathrm{K} \tag{2.21}$$

と覚えるとよい．太陽の表面温度がおよそ摂氏 1 万度であるので，それから発せられる光のエネルギーは k_B を掛けて温度をエネルギーに変換すれば，およそ 1 eV の紫外線となることが分かる．ボルツマン定数の大雑把な値を覚えておくことは重要である．そうすると温度をエネルギーに直ぐに換算できるからである．

同様にして，圧力 p の外界に接していて体積が変化する力学系を考える．体積が V である確率は，$e^{-\beta pV}$ に比例するが，これは同じ圧力の下に置かれた体積 V_I と体積 V_{II} の系を合成することを考えると理解できる．圧力とは体積を小さくしようとする力である．この力が同じだと合成した体積が $V_{III} = V_I + V_{II}$ の系は安定して存在する．体積は足し合わされて確率は掛け合わされるので都合が良い．更に外界との間で粒子の出入りがある場合には，粒子数 N_a を増やそうとする力である「化学ポテンシャル（chemical potential）」μ_a を導入して，粒子数が N_a となる確率を，$e^{\beta\mu_a N_a}$ に比例するとしよう．粒子数を増やそうとする力が等しければ，粒子数 N_I と粒子数 N_{II} の系を合成しても，合成した粒子数が $N_{III} = N_I + N_{II}$ の系は安定して存在する．このとき粒子数 N_a には保存則が成り立つ必要があり，合成系を作ると化学変化を起こして粒子数が変化する場合には使えない．上記において，係数 $\beta = 1/k_BT$，p あるいは μ_a の入り方は自明ではない．これはこのような確率を使って色々な計算を実行してみると（これを確率統計を用いる力学「統計力学（statistical mechanics）」の計算という），エネルギーや熱量や圧力等に関する正しい関係式（これを熱に関する力学「熱力学（thermodynamics）」の関係式という）が導出できることから理解するのである．この節の最後に熱力学の関係式を幾つか導いてこのことを理解することにしよう．

先ず最も基本的なカノニカル分布の使い方を説明する．(2.15) 式では確率がこれに比例するとしかいっていない．従ってこの表式では全確率は 1 ではなく

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} \tag{2.22}$$

であるので，系が状態 i に存在する本当の確率の値は，全確率が 1 になるよう

に Z で割っておく必要がある．

$$Pr_i = e^{-\beta E_i}/Z. \tag{2.23}$$

こうしておくと，全確率が $\sum_i Pr_i = 1$ となる．この Z を「分配関数 (partition function)」あるいは「状態和 (英語：sum over states, 独語：Zustandssumme)」という．Z と書くのは独語から由来している．この分配関数をエネルギーに関する積分に書き直そう．

$$Z = \int_0^\infty dE\, \Omega(E,V,N) e^{-\beta E}, \tag{2.24}$$

$$\Omega(E,V,N)dE = \sum_i 1 \Big|_{E<E_i<E+dE}. \tag{2.25}$$

ここでは体積 V と粒子数 N は固定するとした．Ω はエネルギーが E と $E+dE$ の間にある状態数（状態の数）密度である．i 毎に状態が 1 つ与えられるので，i 毎の状態数 1 をエネルギーの範囲内で足し合わせて Ω を計算していることが分かる．この状態数の多さが，系の微視的な複雑さを表す．状態数を用いてボルツマンは「エントロピー（entropy)」S を導入した．

$$S = S(E,V,N) = k_B \ln \Omega(E,V,N)dE. \tag{2.26}$$

2 つの系 I と系 II を合成した系 III の状態数は，それぞれの系の状態数の積となる．ln を用いると積を和に変換することができる．しがたって，エントロピーは系を合成すると和になる．

$$\Omega_{III}(E,V,N)dE_{III} = \Omega_I(E,V,N)dE_I \cdot \Omega_{II}(E,V,N)dE_{II}, \tag{2.27}$$

$$S_{III} = S_I + S_{II}. \tag{2.28}$$

2 つの系を合成したとき 2 つの系の間に熱が流れない場合，2 つの系は「熱平衡（thermal equilibrium)」状態にあるという．熱平衡でなければ 2 つの系の間に熱が流れる．熱が流れると合成系を作っている 2 つの系は合成前の状態から熱の流れによって状態が変化するだろう．そのときどのような方向に状態が変化するのかをエントロピーは教えてくれる．熱が流れず変化しない場合の合成系の状態数は，それぞれの系の状態数の積である．単純に系 1 が存在してその上に系 2 が存在するからである．しかしながら 2 つの系の間に熱が流れて状態が変化した場合には，合成系として可能な状態数は，単純に元の 2 つの系の状態数の積となるよりも大きくなる方向に変化すると考えられる．より状態数が多い方向，存在する確率が大きくなる方向に状態は変化する．微視的状態をより多く含むより安定な状態へと状態が変化するので，合成系のエントロピーは合成前のエントロピーの和よりも大きくなる．

$$S_{III} > S_I + S_{II}. \tag{2.29}$$

これがエントロピー増大則である．

ここで「ヘルムホルツ（Helmholtz）の自由エネルギー（free energy）」F を

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z(T, V, N) \tag{2.30}$$

として導入しよう．ヘルムホルツは熱力学を始めとする多方面で業績を残した発想が極めて自由な科学者である．晩年には「On the Sensations of Tone」という聴覚と音楽に関する本を書いた．このとき分配関数は

$$Z = \int_0^\infty dE\; e^{-\beta(E-TS)} \tag{2.31}$$

$$= e^{-\beta F(T,V,N)} \tag{2.32}$$

となる．上で述べたことを用いれば，状態の足し上げをエネルギー積分に変更するときに上式のようにエントロピーが現れることが理解できるだろう．粒子数が非常に多い場合には，E が増加すると，E と共にエントロピー S も急速に増加するので，指数関数の肩にある $E - TS(E, V, N)$ は $E = E^*$ で極値の鋭いピークを持つことになるだろう．このとき $e^{-\beta(E-TS)}$ も鋭いピークの極値を与える．従ってエネルギー積分はそのピークの値で置き換えることができる．つまり粒子数が非常に多い場合には

$$F(T, V, N) = E^* - TS(E^*, V, N) \tag{2.33}$$

としてよい．$E - TS(E, V, N)$ は E^* で極値を取るのだから，E で微分するとその値でゼロになる．即ち

$$1 - T\frac{\partial S(E, V, N)}{\partial E}\bigg|_{E=E^*} = 0. \tag{2.34}$$

ここで「偏微分（partial differentail）」∂ を使った．補足しよう．S は E と V と N の関数である．変数 V と N を固定して，S を E の関数として普通に微分することを，S を E で偏微分するといって，$\frac{\partial S}{\partial E}$ と書く．固定して動かさない変数を明らかにするために，$\frac{\partial S}{\partial E}\big|_{V,N}$ のように右下に固定する変数を書くこともある．

式 (2.34) は絶対温度 T に対する熱力学の関係式を与える．即ち

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(E, V, N)}{\partial E}. \tag{2.35}$$

これから $TdS = dE$ が出る．体積 V と粒子数 N を固定しているので，体積変化や粒子数の変化によってエネルギーが変化したのではない．系のエネルギー増加 dE は外部から，即ち温度 T の熱浴から熱の形で流入したと考えられる．流入する「熱量（heat）」を $d'Q$ と書くと，

$$dE = TdS = d'Q \quad (V \text{ と } N \text{ を固定}) \tag{2.36}$$

となる．「クラウジウス（R.J.E. Clausius）」は上記の関係式 $dS = \frac{1}{T}d'Q$ に

よってエントロピー S を導入したが，ボルツマンによるエンントロピーの定義を知っているわれわれには，熱とは物質の「微視的な複雑さ」（状態数の多さ）を増やす働きがあることが分かる．(2.36) 式は熱もエネルギーの一種であることを示している．一般的には微視的な複雑さは，外部からの熱の流入によって増加する以上に，内部で熱の流れを起こして，より複雑な微視的構造を持つ状態へと状態を変化させることになる．この内部で熱が流れて微視的な複雑さを増した部分を内部で発生するエントロピーという．従って一般的には

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{T}d'Q \text{ (熱として外部から流入するエントロピー)} \\ &\qquad + dS \text{ (内部で発生するエントロピー)} \\ &\geq \frac{1}{T}d'Q \end{aligned} \tag{2.37}$$

が成り立つ．熱の微小量に $d'Q$ とプライムを付けた理由を述べる．例えば $S(E, V, N)$ は，状態 (E, V, N) を与えると一意的に決まるので，次の式で微小量を表すことができる．即ち

$$dS = \frac{\partial S}{\partial E}dE + \frac{\partial S}{\partial V}dV + \frac{\partial S}{\partial N}dN. \tag{2.38}$$

この場合には d にプライムを付けない．

一方熱量は状態を与えても一意的に決まらない．1 つの状態から他の状態に変化するときに，例えば等温変化を行った後に断熱変化を行う場合と，断熱変化を行った後に等温変化を行う場合とでは，吸収する熱量が異なることは良く知っている．従って Q は状態（E, V, N）で一意的に決まるものではなく，その状態に到達するまでに経由した状態変化の履歴によって異なる値を取る．従って熱量の微小量は，(2.38) 式のような単純な形には書くことはできず，例え微小変化であったとしても変化の仕方に依存する．このことを明示するために d にプライムを付ける習慣となっている．

系を与えるときに温度 T に加えて圧力 p を指定することはよくある．この場合には存在確率は $e^{-\beta E} \times e^{-\beta pV}$ となり，体積 V はこの確率に従って分布する．カノニカル分布と同様にして，全確率 Y を導入する．

$$Y = \int_0^\infty dV \sum_i e^{-\beta(E_i + pV)}. \tag{2.39}$$

この全確率を用いて「ギッブス（Gibbs）の自由エネルギー（free energy）」G が定義される．

$$G = -\frac{1}{\beta}\ln Y(T, p, N). \tag{2.40}$$

ヘルムホルツの自由エネルギーと比較するとギッブスの自由エネルギーでは，変数が V から p に変わっている．前者は体積を指定した場合の統計力学であるが，後者は圧力を指定した場合の統計力学である．ヘルムホルツの自由エネ

ルギーの場合と同様にして，G はエネルギーが E^*，体積が V^* のときに極値の鋭いピークを持つので，その値で G を近似すると，

$$G(T,p,N) = E^* - TS(E^*,V^*,N) + pV^* \tag{2.41}$$

となる．V^* で極値となる条件は

$$\frac{p}{T} = \left.\frac{\partial S(E,V,N)}{\partial V}\right|_{E,N} \tag{2.42}$$

であるが，この式も熱力学において圧力を与える関係式である．この式は，E と N を固定したときには，外部から流入した熱量は内部エネルギーを変化させたり粒子数を変化させたりできないので，圧力が外部にする仕事に変化したことを表している．即ち

$$pdV = TdS = d'Q \quad (E \text{ と } N \text{ を固定}), \tag{2.43}$$

である．

最後に体積は一定とするが，粒子数が変化する場合もやっておこう．この場合を「グランド・カノニカル分布 (grand canonical ensemble)」と呼ぶ．存在確率は $e^{-\beta E} \times e^{\beta\mu N}$ なので，全確率 Ξ は

$$\Xi = \sum_N \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N)} \tag{2.44}$$

である．対応する自由エネルギーは

$$J = -\frac{1}{\beta}\ln \Xi(T,V,\mu). \tag{2.45}$$

これまでと同様に，J は E^* と N^* で鋭いピークを持つので次のように近似できる．即ち

$$J(T,V,\mu) = E^* - TS(E^*,V,N^*) - \mu N^* \tag{2.46}$$

となる．これが N^* で極値を持つ条件は

$$\frac{\mu}{T} = -\left.\frac{\partial S(E,V,N)}{\partial N}\right|_{E,V} \tag{2.47}$$

となり，内部エネルギーと体積を変化させずに粒子数を増やしたことによるエネルギーの増加分は熱の形として外部放出にしなければならない．即ち，

$$\mu dN = -TdS = -d'Q \quad (E \text{ と } V \text{ を固定}). \tag{2.48}$$

統計力学から導いた 3 つの熱力学の関係式 (2.36), (2.43), (2.48) を総合すると，

$$dE = TdS - pdV + \mu dN \tag{2.49}$$

であることが分かる．E，V，N の一部を固定して両辺を見比べてみると納得

できるだろう．この最後の式は熱力学の出発点となる「エネルギーの保存則」を表している．このように熱力学の関係式が正しく導けるので，最初に述べた統計力学の確率分布は正しいと考えてよいだろう．

最後に（T, V, N）が一定の場合には，状態変化は必ずヘルムホルツの自由エネルギー F が減少する向きに起きることを説明しよう．この場合エネルギー保存則 (2.49) と，エントロピー増大則 (2.37) を使うと，

$$\delta F = \delta E - T\delta S, \tag{2.50}$$

$$\delta E = \delta' Q \leq T\delta S, \quad \text{so that} \tag{2.51}$$

$$\delta F \leq 0 \tag{2.52}$$

となって，F が減少する方向に状態が変化する．従って（T, V, N）が一定の場合には，ヘルムホルツの自由エネルギー F はどんどん小さくなって，最終的には F が最小となる状態が実現する．

同様にして（T, p, N）を一定として状態を変化させる場合には，ギッブスの自由エネルギー G が最小となる状態が実現する．なぜならば

$$\delta G = \delta E - T\delta S + p\delta V, \tag{2.53}$$

$$\delta E = \delta' Q - p\delta V \leq T\delta S - p\delta V, \quad \text{so that} \tag{2.54}$$

$$\delta G \leq 0 \tag{2.55}$$

だからである．

2.3 量子力学

次に量子力学を説明しよう．「量子力学（quantum mechanics）」は 1924 年にハイゼンベルグ（W. Heisenberg）が，物体の位置座標 x と運動量 p は微視的な世界では通常の数ではなく「行列（matrix，数を縦と横に並べたもの）」であると考えたときに誕生した．

水素原子の中の電子は陽子の周りを回っている．古典力学（classical mechanics，Newton 力学）では，どのような軌道も許されるので，電子はいかなるエネルギーも許される．しかし現実の水素原子のエネルギーは飛び飛びの値 E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を取ることが明らかになってきた．ボーア（Niels Bohr）が 1923 年に提唱した原子模型によると，水素のエネルギー準位（energy level）は，$n = 1, 2, 3, \ldots$ で区別される飛び飛びの値，

$$E_n = -R \cdot hc\frac{1}{n^2} \tag{2.56}$$

を取る．ここで R は長さの逆数の単位を持つ「リュードベルグ（Rydberg）定数」で 1.0972131/100 nm．nm はナノメートルで 10^{-9} m である．h は「プラ

ンク定数 (Planck constant)」，c は光の速さである．今電子が n 番目のエネルギーレベルから m 番目のエネルギーレベルに「遷移 (transition，移り変わること)」するとしよう．このときエネルギーは保存するので，2 つのエネルギーレベルの差に等しいエネルギーを持つ光を放出したり吸収したりすることで辻褄を合わせる．つまり微視的な原子の中の電子の運動は，出発点を n 番目のエネルギーレベルとし，到達点を m 番目のエネルギーレベルとする場合には可能であるが，それ以外の運動は許されないということになる．従ってこの運動を記述する位置と運動量は出発点と到達点を明示した x_{mn} と p_{mn} になる．これは位置と運動量を行列と考えて，その m 行 n 列成分が電子の運動を記述すると考えることと同じである．ハイゼンベルグはこのように考えて量子力学を創ったのである．

ニュートン力学では位置座標と運動量は通常の数なので量子力学はニュートン力学とは異なる．量子力学を理解するには，電子などの「粒子 (particle)」も微視的世界では「波 (wave)」として記述できると考えるのが一番手っ取り早い．ある時刻 t に座標 $\boldsymbol{x}$ に存在する粒子は，エネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ によって特徴付けられる．粒子の質量を m，位置エネルギー（ポテンシャルエネルギーあるいは単にポテンシャルともいう）を $V(\boldsymbol{x})$ とすると，粒子の持つエネルギー E は次の式で与えられる

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{x}). \tag{2.57}$$

運動量は質量と速度 $\boldsymbol{v}$ をかけたものなので，$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$．従って粒子の持つエネルギーは運動エネルギー $\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$ と位置エネルギー V の和である．

さてこの粒子を「波」として表すには，粒子を波として記述する手段が必要である．手段として各粒子に，「波動関数 (wave function)」という波を記述する関数 $\psi(t, \boldsymbol{x})$ を付与することにしよう．波動関数は波を記述する関数なので，波を特徴付ける「周期 (period)」T と「波長 (wave length)」λ を用いて

$$\psi(t, \boldsymbol{x}) = e^{-i2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}}{\lambda}\right)} \tag{2.58}$$

と書ける．ここで $\boldsymbol{n}$ は波の進行方向を表す長さ 1 のベクトルである．時刻 t に色々な場所で波の形を観測すると，$\boldsymbol{x}$ が波の進行方向に λ だけ離れても波の形は変わらない．また同じ場所 $\boldsymbol{x}$ に留まって波の形を観測した場合には，時間が T 経過すると波はもとの形に戻る．このように波長や周期の意味するところを忠実に再現しているので，式 (2.58) は波を表す関数（波動関数）ということができる．上の周期性は $e^{i2n\pi} = \cos(2n\pi) + i\sin(2n\pi) = 1$ (n : 整数) から理解できる．指数関数は三角関数と同じように，「位相 (phase，指数関数の肩から i を除いたもの)」に関して 2π の周期性がある．さて周期の逆数を「振動数 (frequency)」といって ν で表し，振動数の 2π 倍を角振動数 (angular frequency)」といって ω で表す．波長/(2π) の逆数の大きさを持ち，波の進行

方向を向いたベクトルを「波数ベクトル（wave vector）」といって $\boldsymbol{k}$ で表す．即ち

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{1}{T}, \quad \boldsymbol{k} = 2\pi\frac{\boldsymbol{n}}{\lambda}. \tag{2.59}$$

粒子のデータ（エネルギーと運動量）と波のデータ（振動数と波長）の対応は，エネルギーに関してはアインシュタインの関係式であり，運動量に関してはドゥ・ブロイの関係式である．まとめると

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad \text{(Einstein)}, \tag{2.60}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{h}{\lambda}\boldsymbol{n} = \hbar\boldsymbol{k} \quad \text{(De Brogie)} \tag{2.61}$$

となる．この粒子としてのデータと波としてのデータをつなぐ役割を果たすのが，プランク定数 h である．従ってプランク定数は量子力学を構成する最も重要な定数である．値は $h = 6.626068\cdots \times 10^{-34}\mathrm{J\cdot s}$ である．プランク定数の大雑把な値を覚えよう．大抵の場合，h を 2π で割った組合せで現れるので，$\hbar = h/2\pi$ の値を覚えておきたい．これは「ディラック定数（Dirac constant)」あるいは「換算プランク定数（reduced Planck constant)」と呼ばれるが，$\hbar c$ と c を覚えるのである．即ち

$$\hbar c \approx 200\,\mathrm{MeV\ fm} = 200\,\mathrm{eV\ nm} \tag{2.62}$$

$$\approx 197\,\mathrm{MeV\ fm} = 197\,\mathrm{eV\ nm}, \quad \text{(more precisely)} \tag{2.63}$$

$$c \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \tag{2.64}$$

と覚える．但し MeV はミリオン電子ボルト（$10^6\,\mathrm{eV}$）で，fm はフェムトメートル（$10^{-15}\,\mathrm{m}$）である．fm を E. フェルミに因んで fermi と呼ぶこともある．

粒子のデータを用いると，波を表す波動関数 (2.58) は

$$\psi(t, \boldsymbol{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} = e^{-i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} \tag{2.65}$$

となる．

少し脱線するが，自然界にあるもう一つの定数「ニュートンの万有引力定数」G_N もこの際覚えておこう．覚え方は距離 r だけ離れた質量 m_1 と m_2 の物体に働く万有引力ポテンシャルを V とすると

$$G_N = \frac{Vr}{m_1 m_2} \tag{2.66}$$

となることが分かる．ここで Vr を $\hbar c$ に置き換え，m_1 と m_2 を共にこの宇宙で最も大きい質量とされるプランク質量 m_{pl} に置き換える．これはプランク質量ほどに大きい質量を持つ粒子の間では，重力相互作用も微視的世界に影響を及ぼすということを意味している．つまりニュートンの万有引力定数は

$$G_N = \frac{\hbar c}{m_{\mathrm{pl}}^2}, \tag{2.67}$$

$$m_{\rm pl} \approx (1 \text{ or more precisely } 1.2) \times 10^{19}\,\text{GeV/c}^2 \tag{2.68}$$

と覚える．GeV はギガ電子ボルトで 10^9 eV である．以上で自然界の全ての定数 k_B, c, h, G_N の大雑把な値を覚えることができた．今後は数式が現れる度に，教科書や辞書や理科年表を開くことなく，大雑把な数値を見積もって見ることを勧める．物理学とは自然現象を数値で表す学問だからである．

さて波動関数を用いて，粒子のデータであるエネルギーや運動量を知るにはどうしたらよいだろうか？ 指数関数の性質 (2.12) から次のようにすればよいことが分かる．即ち，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\boldsymbol{x}) = E\ \psi(t,\boldsymbol{x}), \tag{2.69}$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\psi(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}\ \psi(t,\boldsymbol{x}). \tag{2.70}$$

ここで「エネルギー演算子 (energy operator)」と「運動量演算子 (momentum operator)」を次のように定義しよう．

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \tag{2.71}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \equiv -i\hbar\boldsymbol{\nabla}. \tag{2.72}$$

演算子 (operator) とは対象物に働きかけて別の対象物を作る操作 (operation) を行うものという意味である．今の場合は対象物である波動関数を微分して導関数を作る操作である．すると以下のようになる．

$$\hat{E}\psi(t,\boldsymbol{x}) = E\psi(t,\boldsymbol{x}), \tag{2.73}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}\psi(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}\psi(t,\boldsymbol{x}). \tag{2.74}$$

つまり粒子としてのデータ（エネルギーや運動量等）を知りたければ，そのデータに対応する演算子を波動関数に作用させればよいということになる．では粒子が存在する時間と場所のデータはどのように得るかだが，これらに対する演算子はそれ自身でよいだろう．即ち

$$\hat{t} = t, \quad \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} \tag{2.75}$$

として，通常の数として扱うこととする．そうすると，粒子のデータを読み取る演算子は，通常の数の規則に従わないことが分かる．演算子は演算させる順序によって答えが変わるからである．例えば，

$$\hat{x}_i\hat{p}_j - \hat{p}_j\hat{x}_i = i\hbar\delta_{ij}, \tag{2.76}$$

$$\hat{t}\hat{E} - \hat{E}\hat{t} = -i\hbar \tag{2.77}$$

となる．これは通常の数ではない．ハイゼンベルグに従って，$\hat{\boldsymbol{x}}$と$\hat{\boldsymbol{p}}$ を行列とすれば理解できる．つまり波と考えることと位置と運動量を行列と考えること

は密接に関係している．ここでは添字 i, j を用いて 3 次元ベクトルの 3 成分（1〜3）を表した．2 つの演算子の積の順序を入れ替えて引いたものを「交換子（commutator）」，加えたものを「反交換子（anti-commutator）」といって，以下の記号で表す．

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \tag{2.78}$$

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}. \tag{2.79}$$

この記号を用いると

$$[\hat{x_i}, \hat{p_j}] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{2.80}$$

$$[\hat{t}, \hat{E}] = -i\hbar, \tag{2.81}$$

となる．ここで δ_{ij} は，i と j が等しいとき 1，異なるときにはゼロとなるクロネッカーのデルタと呼ばれる記号である．式 (2.80) は量子力学に移行する，即ち量子化を行うときに設定する「交換関係（commutation relation）」であり，「量子化条件（quantization condition）」と呼ばれる．これを設定すると位置や運動量が単なる数ではなくなって，量子力学の世界に入る．

もう一度ニュートン力学におけるエネルギーの式 (2.57) に戻ろう．量子力学ではニュートン力学の観測量をそれに対応する演算子を波動関数に作用させて求めるので，この式は量子力学では

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, \boldsymbol{x}) = \hat{H}\psi(t, \boldsymbol{x}) = \left\{\frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2}{2m} + V(\mathbf{x})\right\}\psi(t, \mathbf{x}) \tag{2.82}$$

と表される．これを「シュレーディンガー方程式（Schrödinger equation）」という．1926 年にシュレーディンガーが提案した方程式である．このシュレーディンガー方程式を解けば，次のように波動関数の時間発展（時間変化）が分かる．

$$\psi(t, \mathbf{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\psi(t_0, \mathbf{x}). \tag{2.83}$$

$\hat{H}$ は演算子であるが，指数関数に対する微分はいつものように (2.12) を用いて計算できる．

2.4 経路積分

前節で量子力学は正しく説明できている．しかしながら現実の波動関数は (2.58) に書いたような簡単な形 $\psi(t, \boldsymbol{x}) = e^{-i2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}}{\lambda}\right)}$ あるいは粒子のデータを用いて表した $e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}$ ではないだろう．ではなぜ実際の波動関数を用いても前章の議論が正しく成り立つのかを説明しなければならない．そのためには量子力学が「経路（path）」に対する足し上げ「経路積分（path integral）」

の概念から成り立っていることを理解しなければならないが，この概念は統計力学の状態に対する足し上げ「状態和」と密接に関係している．

先ず「ラグランジアン（Lagrangian）」L と「作用（action）」S を導入し，これが波の位相を表すことを理解しよう．ラグランジアンはハミルトニアンと同様に，ラグランジュ（Lagrange）という人が与えた関数という意味で，人名の形容詞形を名詞のように使ったものである．L と S は以下のように定義される．

$$L(t) = \boldsymbol{p}(t) \cdot \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} - H(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}(t)), \tag{2.84}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(t) \\ &= \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} \boldsymbol{p}(t) \cdot d\boldsymbol{x}(t) - \int_{t_1}^{t_2} H(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}(t)) dt. \end{aligned} \tag{2.85}$$

作用を計算するには時間積分を実行しなければならない．時間積分を行うためには $\boldsymbol{x}(t)$ と $\boldsymbol{p}(t)$ が t のどのような関数であるかを知らなければならない．関数を与えると $t_1 < t < t_1$ での粒子の位置と運動量が決まる．これは粒子の運動の経路（path）を与えることになる．つまり作用を計算するには，粒子の経路（path）を与える必要があり，与えられた path 毎に積分が実行されて作用の値が決まるのである．積分が経路 P に依存することを明示するために，

$$S[P] = \int_{t_1,P}^{t_2} dt L(t) \tag{2.86}$$

$$= \int_{x(t_1),P}^{x(t_2)} \boldsymbol{p}(t) \cdot d\boldsymbol{x}(t) - \int_{t_1,P}^{t_2} H(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{p}(t)) dt \tag{2.87}$$

と書こう．作用が波動関数の位相 $\Phi[P]$ と関係していることを見るために $e^{\frac{i}{\hbar}S[P]}$ を作る．（$\Phi[P] = S[P]/\hbar$ である．）即ち

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}S[P]} &= e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0,P}^{t} dt' L(t')} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\left(\int_{x(t_0),P}^{x(t)} \boldsymbol{p}(t') \cdot d\boldsymbol{x}(t') - \int_{t_0,P}^{t} H(\boldsymbol{x}(t'), \boldsymbol{p}(t')) dt'\right)}. \end{aligned} \tag{2.88}$$

ここで時間間隔を n 等分しよう．即ち $t > t_{n-1} > t_{n-2} > \cdots > t_1 > t_0$ として，それぞれの時間間隔を微小量 ϵ とする．即ち $t_i - t_{i-1} = \epsilon$．そうすると積分は微小時間に関する和となって，以下の式で $n \to \infty$ とすることに相当する．

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}S[P]} &= e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}(t)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t_{n-1})) - E(\boldsymbol{x}(t),\, \boldsymbol{p}(t))(t-t_{n-1}))} \\ &\times\, e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}(t_{n-1})\cdot(\boldsymbol{x}(t_{n-1})-\boldsymbol{x}(t_{n-2})) - E(\boldsymbol{x}(t_{n-1}),\, \boldsymbol{p}(t_{n-1}))(t_{n-1}-t_{n-2}))} \\ &\times \cdots \\ &\times\, e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}(t_1)\cdot(\boldsymbol{x}(t_1)-\boldsymbol{x}(t_0)) - E(\boldsymbol{x}(t_1),\, \boldsymbol{p}(t_1))(t_1-t_0))}. \end{aligned} \tag{2.89}$$

この式は経路 P に添って波が伝搬していることを表している．何故ならば，各

微小時間間隔毎に前章で扱った最も単純な波の伝搬の式が掛け合わさっているからである．即ち $e^{\frac{i}{\hbar}S[P]}$ は経路 P に添っての波の伝搬，即ち波動関数の位相変化を正しく記述している．では時刻 t，位置 $\boldsymbol{x}$ における波動関数はどのように記述されるか？ 出発点を時刻 t_0，位置 $\boldsymbol{x}_0$ としよう．ここで波の干渉を思い出そう．例えば光源からの光が 2 つのスリット S_1 と S_2 を通ってスクリーンに到達する場合には，波の経路は 2 つのスリットを通る 2 種類の経路 P_1 と P_2 である．それぞれの経路に添って波の位相変化を計算し，それを重ね合わせることによってスクリーン上で波が強め合うのか弱め合うのかが決まる．われわれの空間にはスリットはない．スリットがないということは，あらゆる可能なスリットの配置が許されるということである．つまり時刻 t_0 に位置 $\boldsymbol{x}_0$ を出発した粒子（波）があらゆる可能な経路（path）を通って（滑らかとは限らずギザギザの path でよい）時刻 t に位置 $\boldsymbol{x}$ に到達すると考える．そうするとあらゆる可能な経路を通った結果生じた波を全て加え合わせることになる．即ち

$$\psi(t,\boldsymbol{x}) = \sum_P e^{\frac{i}{\hbar}S[P]}\psi(t_0,\boldsymbol{x}_0). \tag{2.90}$$

これが正しい波動関数の表式である．ここで $\sum_P$ をよく積分の形に書く．即ち

$$\sum_P e^{\frac{i}{\hbar}S[P]} = \int \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\mathcal{D}\boldsymbol{p}(t)e^{\frac{i}{\hbar}S[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{p}(t)]}. \tag{2.91}$$

意味は分かるだろう．

さて正しい波動関数を用いても前節の結果が成り立つ理由を説明しよう．(2.71）と (2.72) に関しては，t 微分や $\boldsymbol{x}$ 微分は，(2.90) にある一番最初の因子にしか作用しない．つまり

$$e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}(t)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t_{n-1}))-E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}(t))(t-t_{n-1}))} \tag{2.92}$$

にだけ作用する．t 微分をすると E が出ることは自明だが，その他に $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$ も現れる．しかしその項は微小量 ϵ が掛かるので無視できる．また $\boldsymbol{x}$ 微分から $\boldsymbol{p}$ が出ることは自明だが，その他に $\frac{dE}{d\boldsymbol{x}}$ も現れる．しかしこの項も ϵ が掛かるので無視できる．結局 $\boldsymbol{p}$ と E を定数と考えて計算した前章の場合と，実際の波動関数で計算した場合との間に違いはなく，(2.73) 式と (2.74) 式は一般的に成り立つ表式であることが分かる．

前出の波を重ね合わせた因子を統計力学にならって同じ分配関数の記号 Z を用いて表そう．但し出発時刻を t_i 到着時刻を t_f とする．initial time と final time という意味であり，$t_i = -\infty$，$t_f = +\infty$ と取ることもよくある．

$$\begin{aligned} Z &= \sum_P e^{\frac{i}{\hbar}S[P]} \qquad (2.93)\\ &= \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\mathcal{D}\boldsymbol{p}(t)e^{\frac{i}{\hbar}S[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{p}(t)]} \end{aligned}$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{D}\boldsymbol{x}(t)\mathcal{D}\boldsymbol{p}(t)e^{\frac{i}{\hbar}\left(\int_{x(t_i)}^{x(t_f)} \boldsymbol{p}(t)\cdot d\boldsymbol{x}(t) - \int_{t_i}^{t_f} H(\boldsymbol{x}(t),\, \boldsymbol{p}(t))dt\right)}. \tag{2.94}$$

分配関数から自由エネルギー F を同じように導入する.

$$F = i\hbar \ln Z. \tag{2.95}$$

もしもプランク定数 h が非常に小さかったとしよう．波の位相は $\hbar$ に逆比例するので，この場合には位相の変化が強調される．作用のわずかな差 ΔS によって，波が強め合ったり弱め合ったりする．弱め合う目安は

$$\Delta S = \pi\hbar = h/2. \tag{2.96}$$

従って，波が弱め合わない範囲 $\Delta S < \pi\hbar = h/2$ に沢山の経路（path）が存在する場合は，プランク定数 h をゼロとしても運動が実現される．これを古典的な運動という．この古典的は経路を $P^* = (\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{p}^*(t))$ で表すと，そこで作用が極値を取ることが分かる．なぜなら極値においては，少しくらい経路を変化させても作用が同じ値を保つので，沢山の経路が集積しているからである．この条件を式で書くと

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}^*}, \quad \frac{d\boldsymbol{p}^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}^*} \tag{2.97}$$

である．即ちハミルトニアンが与えられたときの力学系の古典的な運動を記述する方程式が得られるのである．これを「ハミルトンの運動方程式 (Hamilton's equation of motion)」と呼ぶ．統計力学の熱力学関係式に対応するものである．細かいことだが，上記のハミルトンの運動方程式の導出のときに次の部分積分を使っている．

$$\int_{x(t_i)}^{x(t_f)} dt \left(\boldsymbol{p}(t)\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} + \boldsymbol{x}(t)\frac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt} \right) = \boldsymbol{p}(t_f)\boldsymbol{x}(t_f) - \boldsymbol{p}(t_i)\boldsymbol{x}(t_i). \tag{2.98}$$

表面項と呼ばれる右辺は，出発時刻と到着時刻を無限の過去と無限の未来に取っておくと無視してよい.

この節で説明した経路積分は，通常の $\boldsymbol{x}$ のみで積分するものではなく，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{p}$ の両方で積分したものである．その方が記述が簡単になると考えたからである．$\boldsymbol{p}$ で積分すると通常のものに一致するので等価である．実はファインマン（Feynman）は，経路積分を提唱した論文[4]では通常の $\boldsymbol{x}$ のみで積分する方法を用いたので，シュレーディンガー方程式の導出はやや複雑である．しかしファインマンは，ハミルトン–ヤコビの方法を用いるとこの導出がより簡単になると論文の終わり頃になって一言つぶやく．そのつぶやきの中身は前節と本節で我々が説明した方法ではなかったかと考えている．論文には最も簡単な証明を避けてやや複雑な証明を記載することがよくある．その方が論文に神秘性が増すと考えるのか，あるいは手の内を明かさないということなのかは本人に聞かない限り分からない.

第 3 章

力学系における対称性とその破れ

この章では先ず対称性が破れることによって物質の姿「相（phase)」が変化する現象である「相転移（phase transition)」を一般的に議論したランダウの理論を紹介する．これは第 1 章で説明した群の言葉で書かれている．次にそれを超伝導に適用したギンツブルグ–ランダウ理論を紹介するが，そのためには電磁気の理解が必須なので，これを解説する．特に予備知識は要しないが，中学・高校で習った電磁気の知識があるとよりよく理解できるだろう．

3.1 相転移の一般論（ランダウ 1937）

さて統計力学と量子力学が分かって来たので，再び第 1 章で始めた対称性とその破れの問題に戻ろう．ランダウの 1937 年の論文を見てみよう[2]．するとこの論文は群の「表現（representation)」に関する言葉で書かれていることが分かる．従って少し説明する必要がある．ここでは正方形群 G と長方形群 H の表現を考えることで満足することにしよう．表現とは群を行列で表すことである．G と H の要素は，90 度回転 r と EG 軸による鏡映 m を用いて，それらの積として作れることは分かっている．従って r と m を表現すればよい．これは難しくないだろう．

$$r \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$m \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

座標の右上に r や m と書いたのはその演算を座標に施すという意味合いである．一般に x と y の関数 $f(x,y)$ への群の演算 g は

$$f(x,y)^g = f(x^g, y^g) \tag{3.3}$$

であろう．もとの変換 r と m は座標の一次変換（変換式が 1 次式で書かれる

変換）である．従って，x と y は入れ替わるかも知れないが，全体の次数は不変である．つまり正方形群 G を作用したとき，x の次数と y の次数の和は不変である．従って表現はこの x の次数と y の次数の和に 1 を加えた数 n によって分類される．$n=2$ だと (x,y)，$n=3$ だと (x^2,xy,y^2)，$n=4$ だと (x^3,x^2y,xy^2,y^3) で与えられる関数の間で変換されることになる．n を増やしても同様．このように関与する関数の数 n を「表現の次数（degree)」と呼ぶことにすると，2 次元表現，3 次元表現，4 次元表現等々が得られる．例えば 3 次元表現の表現行列は

$$r \to \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$m \to \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

となる．この表現の基底（base）は (x^2,xy,y^2) であるが，x^2+y^2 は G に属する如何なる変換を施しても不変であることが分かるのでこれを分離すると，

$$r \to \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

$$m \to \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \\ x^2-y^2 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

となり，3 次元表現は，1 次元の表現 x^2+y^2（何も変化しないので恒等表現）と 2 次元表現 $(2xy, x^2-y^2)$ に分解できる．このように分解できる表現を「可約表現（reducible representation)」という．基底を取り替えても分解できない場合を「既約表現（irreducible representation)」という．

さてランダウは，対称性が破れる前の原子の分布を表す密度関数 $\rho(x,y,z)_0$ は G で不変であるが，対称性が破れた後の密度関数 $\rho(x,y,z)$ は $\rho(x,y,z)_0+\delta\rho(x,y,z)$ と変化し，変化分の $\delta\rho(x,y,z)$ は G で不変でなく，G の部分群 H でのみ不変になると考えた．これを具体的に表して，正方形から長方形に原子の分布関数が変化する様子を見てみよう．x と y のどのような関数が $\rho(x,y,z)_0$ と $\delta\rho(x,y,z)$ の候補となり得るかを考えるのである．今の問題は 2 次元であるので直感に頼って，

$$\rho(x,y)_0 = \rho_0(x^2+y^2, x^2y^2), \quad \text{or more simply } \rho_0(x^2+y^2) \tag{3.8}$$

$$\delta\rho(x,y) = \delta\rho(x^2,y^2) \tag{3.9}$$

としてよいのではないだろうか．少し補足する．r で不変な関数は x^2+y^2 と

x^2y^2 であり，r^2 で不変な関数は x^2 と y^2，m で不変な関数も x^2 と y^2 である．G は r と m で構成され，H は r^2 と m で構成されているので，x^2 と y^2 は H でのみ不変であり G では不変でない．G で不変なものは x^2+y^2 と x^2y^2 である．例えば $n=3$ の表現に注目し，その基底を $\phi(x,y)_0$，$\phi(x,y)_1$，$\phi(x,y)_2$ として，これを「正規直交基底（orthonormal bases)」にする．正規直交基底とは次の関係式を満たすものをいう．即ち

$$\int dxdy\ \phi(x,y)_i^\dagger\ \phi(x,y)_j = \delta_{ij}. \tag{3.10}$$

ここで † は複素共役である．積分を 1 にする（規格化する）ためには無限遠で急速に小さくなる関数でないといけない．例えば

$$\phi(x,y)_0 = N_0(x^2+y^2)e^{-A(x^2+y^2)}, \tag{3.11}$$

$$\phi(x,y)_1 = N_1 2xye^{-A(x^2+y^2)}, \tag{3.12}$$

$$\phi(x,y)_2 = N_2(x^2-y^2)e^{-A(x^2+y^2)} \tag{3.13}$$

として，A，N_0，N_1，N_2 を適切に選ぶと (3.10) の条件を満たすようにできることは分かる．また正方形格子や長方形格子のように，同じ構造が $a=2$[cm] の間隔で連なっている場合には，その周期性を加味して，

$$\phi(x,y)_0 = N_0\left([\sin(2\pi x/a)]^2+[\sin(2\pi y/a)]^2\right), \tag{3.14}$$

$$\phi(x,y)_1 = N_1 2\sin(2\pi x/a)\sin(2\pi y/a), \tag{3.15}$$

$$\phi(x,y)_2 = N_2\left([\sin(2\pi x/a)]^2-[\sin(2\pi y/a)]^2\right) \tag{3.16}$$

とするのが正しいかもしれない．この場合の規格化は 1 周期で積分することで実現される．

ランダウがいう，密度分布関数をある表現（$n=3$ を分解して得られる 2 次元既約表現）の基底で展開するとは，

$$\rho(x,y) = \rho_0+\delta\rho, \tag{3.17}$$

$$\rho_0 = c_0\phi_0(x,y), \tag{3.18}$$

$$\delta\rho = c_1\phi_1(x,y)+c_2\phi_2(x,y) \tag{3.19}$$

である．もともと c_0 のみであった状態で温度を下げると，c_1 と c_2 がゼロでない数として現れるならば，密度に x 方向と y 方向の違いが生じて長方形に対称性が破れることが分かる．ここで統計力学の，温度 T と圧力 p を指定した系では系が選択するのは，ギッブスの自由エネルギー $G(T,p)$ が最小になる状態であることを思い出そう．この $G(T,p)$ は密度分布関数で与えられる．

$$G(T,p) = G[\rho(x,y)] = G[\rho_0(x,y)+\delta\rho(x,y)]$$
$$= G[\rho_0(x,y)] + A(T,p)_1\int dxdy\delta\rho(x,y) + A(T,p)_2\int dxdy(\delta\rho(x,y))^2$$

$$+ A(T,p)_3 \int dxdy(\delta\rho(x,y))^3 + A(T,p)_4 \int dxdy(\delta\rho(x,y))^4$$
$$+ B(T,p)_4 \left(\int dxdy(\delta\rho(x,y))^2\right)^2 + \cdots. \tag{3.20}$$

この内どの項が残るかを考えて見ると

$$\int dxdy\delta\rho(x,y) \quad = 0, \tag{3.21}$$
$$\int dxdy(\delta\rho(x,y))^2 = (c_1)^2 + (c_2)^2, \tag{3.22}$$
$$\int dxdy(\delta\rho(x,y))^3 = 0, \tag{3.23}$$
$$\int dxdy(\delta\rho(x,y))^4 = \alpha(c_1)^4 + \beta(c_1c_2)^2 + \gamma(c_2)^4. \tag{3.24}$$

従って，

$$\begin{aligned} G(T,p) &= G[\rho_0(x,y)] \\ &+ A(T,p)_2\left((c_1)^2 + (c_2)^2\right) + B(T,p)_4\left((c_1)^2 + (c_2)^2\right)^2 \\ &+ A(T,p)_4\left(\alpha(c_1)^4 + \beta(c_1c_2)^2 + \gamma(c_2)^4\right) + \cdots \end{aligned} \tag{3.25}$$

となる．α，β，γ は基底関数の積を積分した結果現れる定数である．

さて系に正方形の対称性があるとことを，物理を定める量である $G(T,p)$ が群 G の下で不変であるとして要請する．

$$G(T,p)^G = G(T,p). \tag{3.26}$$

温度を下げると，正方形の対称性が壊れて長方形の対称性になることを示したいのだが，途中で長方形の対称性を人為的に要請するのではなく，自然にその対称性に壊れることを示そうというのがランダウが目論んだことである．従って $G(T,p)$ は群 G の下で不変でなければならない．群 G の表現とは，G の任意の元 g を，ある基底 $(\phi_1(\boldsymbol{x}),\ldots,\phi_n(\boldsymbol{x}))$ に対する行列による変換として表現する．即ち

$$G \ni g \to M(g) \in \{n \times n \text{ matrix}\}, \tag{3.27}$$
$$\begin{pmatrix} \phi_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \phi_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}^g = M(g) \begin{pmatrix} \phi_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \phi_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

$\delta\rho$ は表現の基底で展開されているので，

$$\delta\rho = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(\boldsymbol{x}). \tag{3.29}$$

これを g で変換すると

$$(\delta\rho)^g = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(\phi_i(\boldsymbol{x}))^g = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j M(g)_{ji}\right)\phi_i(\boldsymbol{x}) \tag{3.30}$$

となるので，係数 c_i は g の下で

$$(c_i)^g = \sum_{j=1}^{n} c_j M(g)_{ji} \tag{3.31}$$

のように変換する．従って $\sum_i (c_i)^2$ は不変である．なぜならば

$$\left(\sum_i (c_i)^2\right)^g = \sum_{ijk} c_j M(g)_{ji} c_k M(g)_{ki} = \sum_j (c_j)^2 \tag{3.32}$$

となるからである．今の場合 $M(g)$ は「直交行列（orthogonal matrix）」であるので，$\sum_i M(g)_{ji} M(g)_{ki} = \delta_{jk}$ が成り立つことに注意しよう．

さて (3.25) に現れる $A(T,p)_4$ の項が G の下で不変かどうかは，考える系によって異なるだろう．今の場合は不変でなさそうなので落とすことにする．このような場合には $\sum_i (c_i)^2$ を「オーダーパラメータ（order parameter）」η の二乗として導入すれば

$$G(T,p) \;=\; G[\rho_0(x,y)] + A(T,p)\eta^2 + B(T,p)\eta^4 + \cdots, \tag{3.33}$$

$$\text{where } \eta^2 \;=\; \sum_i (c_i)^2. \tag{3.34}$$

ランダウは $A(T,p)_4$ の項が現れる場合も考えているので，$\gamma_i = c_i/\eta$ として，

$$G(T,p) \;=\; G[\rho_0(x,y)] + A(T,p)\eta^2 + B(T,p;\gamma_i)\eta^4 + \cdots \tag{3.35}$$

としている．

通常は（正方形と長方形の問題などでは）η のべきとしては 4 次で留めてよいだろう．高温側では $G = G[\rho_0(x,y)]$ となって正方形の分布になるとするならば，そのときは $A(T,p)$ も $B(T,p)$ も正である．なぜならば η を動かしたときに $\eta = 0$ で G が最小となるからである．温度 T が降下したとき，ある温度で $A(T,p)$ がゼロとなり，それより低温側では負になるとしよう．つまり

$$A(T,p) > 0 \quad \text{for} \quad T > T_c \quad \text{高温側} \tag{3.36}$$

$$A(T_c,p) = 0 \tag{3.37}$$

$$A(T,p) < 0 \quad \text{for} \quad T < T_c \quad \text{低温側} \tag{3.38}$$

$$B(T,p) > 0 \quad \text{for both sides.} \tag{3.39}$$

ここで現れる T_c を「臨界温度（critical temperature）」あるいは「キュリー温度（Curie temperature）」と呼ぶ．このキュリーはキュリー夫人の夫のピエール・キュリーであり，磁性における相転移現象の発見者である．ピエール・キュリーは磁性を研究する目的で微弱電流を測定する装置を開発していたが，

これがキュリー夫妻のポロニウムとラジウムという「放射性物質（radioactive material)」の発見に役立ったのである．放射性物質から飛び出す正電荷を持つ α 線（ヘリウムの原子核）あるいは負の電荷を持つ β 線（電子）を電流計で測定したのである．

さて $T < T_c$ のとき $G(T,p)$ が最小となる η の値を求めよう．容易に

$$
\begin{aligned}
G(T,p) &= G[\rho_0(x,y)] \\
&\quad + B(T,p)\left(\eta^2 - \frac{-A(T,p)}{2B(t,p)}\right)^2 - B(T,p)\left(\frac{-A(T,p)}{2B(t,p)}\right)^2 .
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

G が最小となるのは

$$
\eta = \langle\eta\rangle = \sqrt{\frac{-A(T,p)}{2B(t,p)}} \tag{3.41}
$$

のときである．これは今の問題では

$$
(c_1)^2 + (c_2)^2 = \langle\eta\rangle^2 \tag{3.42}
$$

となる．つまり c_1 と c_2 は半径 $\langle\eta\rangle$ の円周上のどの点を取っても G は同じ値を取るので等しく実現可能な状態である．現実にはそのどこかの点に対応する状態を取ることになる．一般には $c_1 = \langle\eta\rangle\cos\omega$，$c_2 = \langle\eta\rangle\sin\omega$ となるので，臨界温度より低温側では原子の密度関数に以下の変化が生じる．

$$
\delta\rho(x,y) = \langle\eta\rangle\left(N_1 2xy\cos\omega + N_2(x^2-y^2)\sin\omega\right)e^{-A(x^2+y^2)}. \tag{3.43}
$$

即ち，$\sin\omega$ の項は，(x,y) での原子の分布を斜め方向（$y=\pm x$ 方向）に歪める働きを持ち，$\cos\omega$ の項は縦横方向に歪める働きを持つ．いずれにしても臨界温度以下で，対称性が G から H に壊れて，原子の分布が変化する現象が起ることを理論的に記述できた．これはランダウによる対称性の破れに基づく「相転移の理論」のほんの一部分を紹介したに過ぎない．原論文にはその他様々なことが書いてあり，最後は液晶の相転移の話となって終わるが目が眩むばかりの論文である．ランダウの論文は常に痛烈な現状批判から始まり，研ぎすまされた感覚で記述されるので本当に恐ろしい．これ以上深入りをすると自信を失うのでこの辺りで次の話題に進もう．

次に超伝導における対称性とその破れを記述するランダウ–ギンツブルグ理論を紹介したい．1950 年に出版された L.D. Landau と V.L. Gnzburg による共著の論文である[3]．これもランダウの論文だけれどもギンツブルグが入っているので怖くない．内容は金属を極低温にしたときに，金属の電気抵抗がゼロになる超伝導現象を記述する理論である．これを理解するためには電磁気学の知識が不可欠であり，電磁場と電子などの荷電粒子がどのように相互作用するのかも知らなければならない．先ず「電磁気（electromagnetism)」の基本法則をまとめることにする．次にその電磁気を記述する理論が「ゲージ理論

(gauge theory)」であることから，電磁場と荷電粒子との相互作用が決まることを話そう．その後にランダウ–ギンツブルグ理論を紹介する．

3.2 電磁気の基本法則

電磁気では，電荷の周りに「電場（electric field）」$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})$ が生じ，電流を流した電線の周りに「磁場（magnetic field）」$\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x})$ が生じる．電場とは時刻 t に位置 $\boldsymbol{x}$ に一定の大きさの電荷を置いたときに，その電荷に働く力の大きさと方向をベクトルとして表したものである．点電荷の周りの電場は放射状に広がることは知っているだろう．次に電線に電流を流すと，電線を取り囲むように磁場が渦状に分布する．これは紙に穴をあけて，その穴に電線を紙に垂直に通して電気を流すと，紙の上にまき散らした鉄粉が，同心円上に分布することから理解できる．ではこのような放射状に分布する電場や渦状に分布する磁場をどのように記述したらよいだろうか．それを考えよう．

先ず原点からの距離を r として r のみの関数 $\phi(r)$ に空間微分を施そう．すると

$$\left.\begin{aligned} \partial_1\phi(r) &= \frac{x_1}{r}\phi'(r), \\ \partial_2\phi(r) &= \frac{x_2}{r}\phi'(r), \\ \partial_3\phi(r) &= \frac{x_3}{r}\phi'(r). \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

となる．但し $'$ は微分を表し，∂_i は x_i による偏微分である．ここでは空間座標 (x,y,z) を (x_1,x_2,x_3) と書いた．上の 3 つの式をベクトルの成分として並べたものを「グラディエント（勾配，gradient）」と呼んで記号で

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{grad}\ \phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{r}\phi'(r) \tag{3.45}$$

と書く．$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi r}$ と置くと，

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}) = -Q\frac{\boldsymbol{x}/r}{4\pi r^2} \tag{3.46}$$

となって，原点においた電荷 Q の周りに放射状に広がる電場を正しく表すことができる．符号に注意して

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}) \tag{3.47}$$

と置こう．これで ϕ を用いると電場の振る舞いが簡単に記述できることが分かった．この ϕ をスカラーポテンシャルという．

次に z 軸上に置いた電線に流れる電流による磁場を再現してみよう．少し面倒だが，1 つベクトル $\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})$ を導入して，「ローテーションまたはカール（回転，rotation または curl）」という概念を導入しよう．

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_1 = (\textbf{rot } \boldsymbol{A})_1 = (\textbf{curl } \boldsymbol{A})_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2,$$
$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_2 = (\textbf{rot } \boldsymbol{A})_2 = (\textbf{curl } \boldsymbol{A})_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3,$$
$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_3 = (\textbf{rot } \boldsymbol{A})_3 = (\textbf{curl } \boldsymbol{A})_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1. \quad (3.48)$$

仮に $A_1 = A_2 = 0$ とし，$A_3 = f(r_\perp)$ としよう．但し $r_\perp$ は電線からの垂直距離であるので，前出の r と異なることに注意しよう．計算すると

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_1 = \frac{x_2}{r_\perp} f'(r_\perp),$$
$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_2 = -\frac{x_1}{r_\perp} f'(r_\perp),$$
$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_3 = 0 \quad (3.49)$$

となる．今 $A(r_\perp) = -\frac{I}{2\pi c} \ln r_\perp$ と置くと

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_1 = -I \frac{x_2/r_\perp}{2\pi r_\perp c},$$
$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_2 = I \frac{x_1/r_\perp}{2\pi r_\perp c},$$
$$(\nabla \times \boldsymbol{A})_3 = 0 \quad (3.50)$$

となる．これは z 軸方向に延びた電線を電流 I が流れたときに生じる，電線周りをぐるっと一周する磁場を見事に再現している．従って

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \quad (3.51)$$

と置くと磁場を $\boldsymbol{A}$ の簡単な関数として表すことができる．この $\boldsymbol{A}$ をベクトルポテンシャルと呼ぶ．上の例から電磁気学はスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを用いると簡単に記述できることが分かった．そのときグラディエントとローテーションが重要な働きをする．

もう 1 つ「ダイバージェンス（発散，divergence）」という概念が必要である．前出の点電荷を原点に置いた場合の電場に対するダイバージェンスを計算してみよう．ダイバージェンスの定義は

$$\nabla \boldsymbol{E} = \textbf{div } \boldsymbol{E} = \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 \quad (3.52)$$

である．点電荷の式を代入して計算すると $\nabla \boldsymbol{E} = 0$ となることが分かる．ところで $\nabla \boldsymbol{E}$ の原点での評価は怪しいことに気が付いた人がいるかもしれない．つまり原点で関数 $E_1(\vec{x})$ を x_1 方向に微分するには

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{E_1(x_1 = \varepsilon, x_2 = 0, x_3 = 0) - E_1(x_1 = -\varepsilon, x_2 = 0, x_3 = 0)}{2\varepsilon} \quad (3.53)$$

を計算することになるが，E_1 の表式を見ると $x_1 = \pm\varepsilon$ で符号が変化する．従ってもう一度慎重に原点での $\nabla \boldsymbol{E}$ を計算し直すと

$$\nabla \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}) = Q \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{4\pi}{3} \varepsilon^3 \right)^{-1} \quad (3.54)$$

となることが分かる．これはゼロではなく半径 ε の微小球の体積の逆数である．この関数を 3 次元における「ディラックのデルタ関数 (Dirac delta function)」と呼んで $\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})$ で表す．この関数の定義は上の議論から分かるように，

$$1)\ \ \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) = 0 \ \ \text{for} \ \ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \tag{3.55}$$

$$2)\ \ \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) = \infty \ \ \text{at} \ \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \ \ \text{however} \tag{3.56}$$

$$3)\ \ \int dx_1 dx_2 dx_3 \ \ \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) = 1 \tag{3.57}$$

である．従って

$$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = Q\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) \tag{3.58}$$

となり，「電荷に関するガウスの法則」が得られた．電荷が色々な場所に分布しているときには電荷密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ は以下のように書けるので

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_i Q_i \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i) \tag{3.59}$$

電荷に関するガウスの法則は一般的には

$$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x}). \tag{3.60}$$

となる．

次に電流によって生じた磁場のローテーションを計算しよう．(3.50) を用いて計算すると $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = 0$ となる．しかしながら電線上（$r_\perp = 0$）での微分の計算は慎重にやり直す必要がある．上のガウスの法則を導くときにやったように電線の上で $\partial_1 B_2 - \partial_2 B_1$ を慎重に計算すると，

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})_3 = \frac{I}{c} \lim_{\varepsilon \to 0} (\pi\varepsilon^2)^{-1} \tag{3.61}$$

となることが分かる．ここで現れる因子は半径 ε の円の面積の逆数である．つまり平面の原点を電線が貫いているので，その原点を中心として電線を取り巻く円の面積の逆数が現れるのである．これは 2 次元のディラックのデルタ関数であることが分かるだろう．念のためその定義を書いておくと，

$$1)\ \ \delta^{(2)}(x_1, x_2) = 0 \ \ \text{for} \ \ (x_1, x_2) \neq (0, 0), \tag{3.62}$$

$$2)\ \ \delta^{(2)}(x_1, x_2) = \infty \ \ \text{at} \ \ (x_1, x_2) = (0, 0), \ \ \text{however} \tag{3.63}$$

$$3)\ \ \int dx_1 dx_2 \ \ \delta^{(2)}(x_1, x_2) = 1 \tag{3.64}$$

である．従って

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c} \boldsymbol{I} \delta^{(2)}(\boldsymbol{x}_\perp). \tag{3.65}$$

ここで電流 I を流れる方向 (x_3 の正の方向) に添ったベクトル $\boldsymbol{I}$ とし，$\boldsymbol{x}_\perp$ は電線から垂直方向のベクトルとしたが意味は分かるだろう．「電流密度（current

density)」$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ を以下で定義すると

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = \sum_i \boldsymbol{I}_i \delta^{(2)}(\boldsymbol{x}_\perp - \boldsymbol{x}_{\perp i}) \tag{3.66}$$

「アンペールの法則」が以下のように得られる.

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}). \tag{3.67}$$

これは電流が流れると，その電流を取り巻くように回転磁場が生じるという法則である．電線を鉄心の周りに巻くと電磁石ができるという実験結果を法則にしたものである．

さて電磁気にはもう 1 つ重要な法則がある．ファラデーの「電磁誘導の法則 (law of electromagnetic induction)」である．これは電線を巻いて作ったコイルに棒磁石を入れたり出したりして，コイルを貫く磁場を時間的に変化させるとその変化を打ち消す方向に電場が生じて電流が流れるという法則である．この法則が

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3.68}$$

と書けることを説明しよう．先ずコイルを (x_1, x_2) 平面上に置いたとしよう．このとき電磁誘導でコイルに生じる電場は，コイルに添って回転する電場である．上の議論（アンペールの法則）から，回転する磁場に対しては $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}$ を作るとこれがコイル面に垂直な x_3 方向のベクトルになることを知っている．x_3 軸の正の向きとは，右ねじを (x_1, x_2) の面内で反時計周りに回転させたときに右ねじの進む方向である．従って磁場を電場に置き換えて再考すると，この右ねじを回転させる方向に電場が生じたとしたとき，$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}$ は右ねじの進む方向を向くことが分かる．電磁誘導の法則は磁場を右ねじが進む方向に増加させたとき，その変化を打ち消す方向に電場が生じるのであるが，その電場の方向は，右ねじを逆回転させる方向である．このようにアンペールの法則の磁場を電場と読み替えると電磁誘導の法則も理解できるが，このとき (3.68) の右辺にマイナスが付くことも納得できるだろう．

アンペールの法則と電磁誘導の法則の右辺に係数に $1/c$ が現れることを様々な単位系を比較して説明することは中々難しい．電磁気は単位系が難しい．ここで用いた単位系では電荷の単位は通常のものと異なる．通常は電子 1 個の電気量の大きさ（電子の素電荷の大きさ）といって e_0 で表すと

$$e_0 = 1.60217\cdots \times 10^{-19} \ \ \mathrm{C\ (Coulomb)} \tag{3.69}$$

であるが，今用いている単位系では

$$\frac{(e_0)^2}{4\pi\hbar c} = \alpha_0 = (137.035999\cdots)^{-1} \tag{3.70}$$

が成り立つ．α_0 は「微細構造定数 (fine structure constant)」と呼ばれる．電

荷 Q^2 の単位は $\hbar c$ と同じく [energy] × [length] である．従って次元を持つ誘電率等をかけることなく，Q^2/r でクーロンエネルギーとなる．この単位系では電場と磁場の単位はともにエネルギー密度の平方根，物理量を [...] で囲んで単位を表すことにすると，$[\boldsymbol{E}] = [\boldsymbol{B}] = ([\text{energy}][\text{length}]^{-3})^{1/2}$ であり，上記したガウスの法則，アンペールの法則と電磁誘導の法則の両辺は正しい単位を持っていることが分かる．この単位系を用いてこの 3 つの法則を観測すると，観測結果として，係数に光速度 c が現れる．つまり電磁気学は，光速度を重要な定数として元々含んでいるのである．従って，電磁気を用いて電磁波（光や電波を含む）の伝搬速度を計算すると，真空中では光速度 c となる．読者の皆さんは，物質中では物質固有の誘電率 ε や透磁率 μ によって電磁波の伝搬速度が $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ と修正されることを知っているかもしれない．

さて世の中には単独に磁気を帯びた粒子「磁気単極子 (magnetic monopole)」は存在しないとされている．存在するのは N 極と S 極を両方持つ場合でこれは円電流によって作られるものである．従って電荷に相当する磁荷はないのだから，磁荷密度は常にゼロである．従って以下の「磁荷に関するガウスの法則」が得られる．

$$\boldsymbol{\nabla B} = 0. \tag{3.71}$$

最後にアンペールの法則を修正しよう．この修正はマクスウェルによってなされた．電線の両端を垂直に切って，その切り口を A と B と名付ける．切り口 A と B を平行に近づけると面積 S（電線の切り口の面積）を持つ平行コンデンサーが得られる．このコンデンサーの両極 A，B に蓄えられる電荷を $+Q$，$-Q$ としよう．コンデンサーの電場 E は A から B の方向に Q/S である．コンデンサーに蓄えられた電荷が変化すると電線に電流が流れる．その大きさは $j = (dQ/dt)/S = \partial E/\partial t$ である．$\partial E/\partial t$ は電線を流れる電流と同じ大きさであり，しかも流れる方向も同じなので，電流が流れていないコンデンサーの間隙にも，$\partial E/\partial t$ という仮想的な電流が流れている考えることができる．これを「変位電流（displacement current)」という．つまりアンペールの法則を

$$\boldsymbol{j} \to \boldsymbol{j} + \partial \boldsymbol{E}/\partial t \tag{3.72}$$

と修正すれば，電流が流れていない場所でもこの法則が成り立つことになる．従って修正された「アンペールの法則」は次の式で

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \tag{3.73}$$

記述される．

以上で電磁気学の基本法則が 4 つの方程式としてまとめられた．これをマクスウェルの方程式と呼ぶ．即ち

$$1)\quad \boldsymbol{\nabla E}(t, \boldsymbol{x}) = \rho(t, \boldsymbol{x}), \quad \text{(electric Gauss)} \tag{3.74}$$

$$2)\ \ \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad \text{(magnetic Gauss)} \tag{3.75}$$

$$3)\ \ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}, \quad \text{(Farady)} \tag{3.76}$$

$$4)\ \ \nabla\times\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} + \frac{1}{c}\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x}) \quad \text{(modified Ampere).} \tag{3.77}$$

の 4 つの法則を表す 4 つの方程式の組である．

電磁気におけるスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とは通常以下のようにして導入される．マクスウェルの方程式の 2) 式と 3) 式は電荷密度と電流密度によらないので，これを先に解いてしまう．その答えが

$$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(t,\boldsymbol{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}, \tag{3.78}$$

$$\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}) \tag{3.79}$$

ということは，これを直接代入して確かめることで示される．このとき ϕ と $\boldsymbol{A}$ の取り方は一意的ではないことが分かる．実際に以下で定義される別の ϕ' と $\boldsymbol{A}'$ を採用しても電場や磁場は変わらない．

$$\phi'(t,\boldsymbol{x}) = \phi(t,\boldsymbol{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial \theta(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}, \tag{3.80}$$

$$\boldsymbol{A}'(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}) + \nabla\theta(t,\boldsymbol{x}). \tag{3.81}$$

この式も直接代入して確認して欲しい．この変換を「ゲージ変換 (gauge transformation)」という．変換パラメータ $\theta(t,\boldsymbol{x})$ が時間と空間座標に依存することが特徴である．従って電磁気理論はゲージ変換不変性を持つ．変換で不変なときに対称性があるというので，ここに「ゲージ対称性」という新しい対称性の概念が現れた．

さてここまで来ると電磁気は，$(\phi,\boldsymbol{A})$ をひとまとめとして 4 次元のベクトルとし，更に $(t,\boldsymbol{x})$ もひとまとめとして「4 次元の時空 (four dimensional space-time)」を作るとより簡明に記述できそうに見える．電磁気理論は電磁波の伝搬速度が光速度 c であることからも分かるように，相対論的に記述される理論である．このような相対論的な記述方法は，少し先延ばしにして次章で説明することにして，ここでは電磁場と物質との相互作用を考えて見る．電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ が電荷 $Q = qe_0$ を持つ荷電粒子に及ぼす力を「ローレンツ力 (Lorentz force)」といって

$$\boldsymbol{F}_{\text{Lorentz}} = Q\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right) \tag{3.82}$$

で表される．質量が m で電荷 Q を持つ粒子に力が働かなければ，ハミルトニアンは $H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}$ である．ここに電磁場を作用させると，電荷を持っているので運動が変化する．そのとき運動をどのように記述したらよいだろうか．

電磁場が存在する場合には，ハミルトニアンと運動量を以下のように変更せよと，大学ではくり返しくり返し教わる．

$$H \to H + Q\phi(t, \boldsymbol{x}), \tag{3.83}$$
$$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - \frac{Q}{c}\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x}). \tag{3.84}$$

第 1 式は，ϕ は電場に逆らって単位電荷をその位置まで持ってくるに要するエネルギーだから，電荷 Q の場合には $Q\phi$ となるので，その分エネルギーが増えることから理解できる．しかし第 2 式は理解できない．理解できないけれど，余りに簡単な置き換え規則なので便利であると同時に，何か深い意味がありそうにも思えて来る．実はこの「置き換え規則」こそが「ゲージ理論」の根本原理なのである．「ゲージ理論」においては上記の置き換えによって電磁相互作用（ゲージ相互作用）を導入し，しかもその電磁相互作用（ゲージ相互作用）の形は完全に正しい．

質量 m，電荷 Q の場合にそれを証明してみよう．上記の「置き換え規則」によってハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{EM1}} = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{Q}{c}\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x})\right)^2 + Q\phi(t, \boldsymbol{x}) \tag{3.85}$$

と決まる．そのハミルトニアン H_{EM1} を用いて古典的は運動を記述するハミルトンの運動方程式 (2.97) を書き下そう．

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v} = \frac{1}{m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{Q}{c}\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x})\right), \tag{3.86}$$
$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} &= \frac{Q}{mc}\sum_{j=1}^{3}\left(\boldsymbol{p} - \frac{Q}{c}\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x})\right)_j \partial_i A_j - Q\partial_i\phi \\ &= \frac{Q}{c}\sum_{j=1}^{3} v_j \partial_i A_j - Q\partial_i\phi.\end{aligned} \tag{3.87}$$

(3.86) を更に時間で微分すると

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}_i}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} - \frac{Q}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j \partial_j A_i\right) \tag{3.88}$$

となる．上記の 2 つの式を整頓してポテンシャルを電磁場で表すと，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{Lorentz}} \tag{3.89}$$

となり，荷電粒子に対する電磁場によるローレンツ力が正しく導出される．これが「置き換え規則」(3.84) が正しいという証明である．荷電粒子と電磁場との相互作用（ローレンツ力）が，簡単な置き換え規則によって見事に導出できるというのは，驚くべきことである．当面ゲージ理論にこれ以上深入りをしないことにしよう．

次に電磁気の基本法則を表すマクスウェルの方程式を，古典的に実現される運動方程式として導出するために，次のハミルトニアンを導入しよう．

$$H_{\mathrm{EM2}} = \int d^3x \left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi + \rho\phi - \frac{1}{c}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\right\}. \tag{3.90}$$

ここで $\int d^3x = \int dx_1 dx_2 dx_3$ で空間上の 3 次元積分である．

このハミルトニアンを用いて，ハミルトンの運動方程式を書き下したいのだが，その前に少し注意が必要である．前回 (2.97) を導出したときにはハミルトニアンは $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ という簡単な形であった．今回は電磁場を考えているので，「場の理論（field theory）」のハミルトニアンである．つまり電場と磁場は空間の各点 x で異なる値を取るかもしれないので，ハミルトニアンとしては空間各点で定義される「ハミルトニアン密度（Hamiltonian density）」$\mathcal{H}(t, \boldsymbol{x})$ の空間積分として与えられる．ある時刻 t において，x の近傍では単位体積当たりのエネルギーが $\mathcal{H}(t, \boldsymbol{x})$ であり，それを空間全体で足し合わせて系全体のエネルギーであるハミルトニアンを与えることになる．このとき古典的に実現される「軌跡（path）」とはなんであろうか．前回は $\boldsymbol{x}^*(t)$ と $\boldsymbol{p}^*(t)$ という時間変化のみを決めればよかったが，今回は電場と磁場の空間各点における時間変化も与えなければならない．つまり $\boldsymbol{E}^*(t, \boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{B}^*(t, \boldsymbol{x})$ 等を知らなければならない．場の理論における「軌跡（path）」を与えるためには，空間の各点での時間変化を与える必要がある．では古典的に実現される軌跡，即ち波の位相が安定していて少し位軌跡を変えても位相が変化しない軌跡とは何であるかというと，それは時刻と空間位置を任意に選んでその近傍で軌跡を変化させたとしても位相が変化しない軌跡である．例えば力学変数が $\phi(t, \boldsymbol{x})$ である場の理論（スカラー場の理論）の作用 S は，波の位相 Φ と $\Phi = S/\hbar$ の関係にあるが，

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3x \left(\pi_\phi(t, \boldsymbol{x}) \frac{\partial \phi(t, \boldsymbol{x})}{\partial t} - \mathcal{H}(t, \boldsymbol{x}) \right), \tag{3.91}$$

ここでハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi_\phi(t, \boldsymbol{x})^2 + \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\nabla} \phi(t, \boldsymbol{x}) \right)^2 + A\phi(t, \boldsymbol{x})^2 + B\phi(t, \boldsymbol{x})^4 \tag{3.92}$$

で与えられる．ここで $\pi_\phi(t, \boldsymbol{x})$ は，場 $\phi(t, \boldsymbol{x})$ に対する「運動量密度（momentum density）」である．場 ϕ を $(t, \boldsymbol{x})$ の近傍のみで微小に変化させるとする．これを $\delta\phi(t, \boldsymbol{x})$ と書こう．このとき練習として次の 3 つの微小変化を実行してみよう．

$$\begin{aligned}
\delta S_1 &= \int dt \int d^3x \psi(t, \boldsymbol{x}) \frac{\partial(\delta\phi(t, \boldsymbol{x}))}{\partial t} = -\int dt \int d^3x \frac{\partial \psi(t, \boldsymbol{x})}{\partial t} \delta\phi(t, \boldsymbol{x}), \\
\delta S_2 &= \int dt \int d^3x \psi(t, \boldsymbol{x}) \frac{\partial(\delta\phi(t, \boldsymbol{x}))}{\partial x_i} = -\int dt \int d^3x \frac{\partial \psi(t, \boldsymbol{x})}{\partial x_i} \delta\phi(t, \boldsymbol{x}), \\
\delta H_3(t) &= \int d^3x \psi(t, \boldsymbol{x}) \frac{\partial(\delta\phi(t, \boldsymbol{x}))}{\partial x_i} = -\int d^3x \frac{\partial \psi(t, \boldsymbol{x})}{\partial x_i} \delta\phi(t, \boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

のように微小変化の計算においては部分積分を使うことができる．なぜならば表面項は $\delta\phi(t, \boldsymbol{x})$ が $(t, \boldsymbol{x})$ の近傍以外ではゼロであるので表面ではゼロとしてよいからである．位相が安定した軌跡を求めるためには，上記のように部分積分を実行して，$\delta\phi(t, \boldsymbol{x})$ の係数を各点 $(t, \boldsymbol{x})$ 毎にゼロとすればよい．この係数

を「汎関数微分（functional derivative）」といって，以下の丸い記号で表す．例えば上記の例では

$$\frac{\delta S_1}{\delta\phi(t,\boldsymbol{x})} = -\frac{\partial\psi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}, \tag{3.93}$$

$$\frac{\delta S_2}{\delta\phi(t,\boldsymbol{x})} = -\frac{\partial\psi(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_i}, \tag{3.94}$$

$$\frac{\delta H_3}{\delta\phi(t,\boldsymbol{x})}(t) = -\frac{\partial\psi(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_i}. \tag{3.95}$$

簡単にいうと，部分積分を実行して純粋の $\delta\phi(t,\boldsymbol{x})$ を作ったときの係数を「積分をしないで」取り出す操作が汎関数微分である．そうすると場の理論における古典的運動を記述するハミルトンの運動方程式は以下の式で与えられることが分かる．

$$\frac{\partial\phi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = \frac{\delta H(t)}{\delta\pi_\phi(t,\boldsymbol{x})}, \tag{3.96}$$

$$\frac{\partial\pi_\phi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = -\frac{\delta H(t)}{\delta\phi(t,\boldsymbol{x})}. \tag{3.97}$$

以上の注意をもとに，ハミルトニアン (3.90) に対するハミルトンの運動方程式を書こう．電磁場の場合には場の変数は $\boldsymbol{A}$ と ϕ である．$\boldsymbol{A}$ に対しては運動量密度 $\boldsymbol{\pi_A}$ が存在するが，ϕ には運動量密度は存在しないとする．即ち $H = H[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\pi_A},\phi]$ とする．ここで $\boldsymbol{\pi_A} = -\boldsymbol{E}/c$ と仮定する．そうすると

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\delta H_{\text{EM2}}}{\delta\boldsymbol{\pi_A}}(t,\boldsymbol{x}) = -c\frac{\delta H_{\text{EM2}}}{\delta\boldsymbol{E}}(t,\boldsymbol{x}) = -c\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\nabla}\phi\right), \tag{3.98}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\pi_A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = -\frac{\delta H_{\text{EM2}}}{\delta\boldsymbol{A}}(t,\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}+\frac{1}{c}\boldsymbol{j}, \tag{3.99}$$

$$0 = -\frac{\delta H_{\text{EM2}}}{\delta\phi}(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla E}-\rho. \tag{3.100}$$

第 1 式は，電場のベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルによる表式を正しく与えので，$\boldsymbol{\pi_A} = -\boldsymbol{E}/c$ の仮定が正しかったことを示しており，第 2 式は修正されたアンペールの法則を，第 3 式は電荷に関するガウスの法則を正しく再現している．従って，(3.90) はマクスウェル方程式を再現する正しいハミルトニアンである．ϕ に対する運動量が存在しないことからガウスの法則が出ることが分かった．ガウスの法則には時間微分が現れないので，時間発展を記述する運動方程式ではない．任意の時刻で成り立つ条件なので，「ガウスの法則」は「拘束条件（constraint condition）」と見なされる．「ガウス法則拘束条件（Gauss law constraint）」ともいう．

ここで H_{EM1} と H_{EM2} の重なる部分についてコメントしよう．H_{EM1} は少し変形すると

$$H_{\text{EM1}} = \frac{(\boldsymbol{p})^2}{2m} + \left(Q\phi - \frac{Q}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right) - \frac{Q^2}{2mc^2}(\boldsymbol{A})^2 \tag{3.101}$$

となる．この第 2 項にある $Q\phi(t,\boldsymbol{x})$ と $-Q/c\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})$ は H_{EM2} では以下のように書かれている．

$$Q\phi(t,\boldsymbol{x}) = \int d^3x'\rho(t,\boldsymbol{x}')\phi(t,\boldsymbol{x}'), \tag{3.102}$$

$$-Q/c\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}) = \int d^3x'\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}'). \tag{3.103}$$

ここで電荷密度と電流密度は，点粒子の運動 $\boldsymbol{x}(t)$ によって作られるもので，

$$\rho(t,\boldsymbol{x}') = Q\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}(t)), \tag{3.104}$$

$$\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x}') = Q\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{v}(t) \tag{3.105}$$

である．その結果，H_{EM1} と H_{EM2} の重なった部分が一致しているので，係数も含めて正しいハミルトニアンであることが分かった．つまり電磁場のみに限ったエネルギーはこの単位系では係数も含めて

$$\int d^3x\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2) \tag{3.106}$$

が正しいことが分かる．ハミルトニアンを書く際にしばしば係数が分からなくなることがある．その時には「マクスウェルの方程式を再現するように係数を決める」という，ここでやった方法を思い出すとよい．特に電子の場合には電荷が負，つまり $Q=-e_0$ であるので符号に注意を要する．上式 (3.101) の最後の項は，電子 2 個が同じ時刻 t に同じ場所 $\boldsymbol{x}$ に存在したときに，電磁場と相互作用することを表している．ベクトルポテンシャル 1 つが「光子（photon）」1 個の波を表すので，この相互作用は電子 2 個と光子 2 個との相互作用（コンプトン散乱）を表している．

この節では電磁気を材料として色々なことが説明できた．「場の理論」と「ゲージ理論」に関しても，「非相対論的（non-relativistic）」な場合（速度が光速よりもずっと遅い場合）の古典論は完全に説明されたと思う．残された問題は相対論的記述と古典的記述からの補正，即ち「統計的揺らぎ（statistical fluctuation）」あるいは「量子的揺らぎ（quantum fluctuation）」である．相対論的記述および「揺らぎ」の計算方法に関しては次章で述べることにする．

以上でギンツブルグ–ランダウ理論を説明する準備が整った．

3.3 ギンツブルグ–ランダウの超伝導模型 (1950)

超伝導とはある種の金属を温度 T_c 以下にすると電気抵抗がゼロになる現象である．水銀 (Hg)，鉛 (Pb)，ニオブ (Nb) の T_c はそれぞれ，4.2，7.2，9.5 K である．1911 年にカメリン・オネスが水銀を用いて超伝導を発見した．超伝導を微視的な理由付けにこだわらず，「現象論的（phenomenologically）」に説明したのがギンツブルグとランダウである[3]．

超伝導では関与する電子が特別な集団的運動をすると考えられるが，この電子の集団運動を 1 つの「有効（effective）」波動関数 $\Psi(\boldsymbol{x})$ を導入して表そうとしたのである．この波動関数は電荷 Q を持つとすると，電磁場とゲージ不変な相互作用をすることになる．定常的な現象を議論するので時間依存性は考えない．更に慧眼を持って，$|\Psi(\boldsymbol{x})|^2$ を超伝導における相転移を記述するオーダーパラメータ η^2 と考えた．前節では荷電を持つ点粒子しか扱わなかったが，これを量子力学へ以降するには，2.3 節を参考にすれば難しくない．このとき「ゲージ理論の置き換え規則」は以下のようになる．

$$\hat{\boldsymbol{p}} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{p}} - \frac{Q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}), \quad \text{即ち} \tag{3.107}$$

$$-i\hbar\boldsymbol{\nabla} \Rightarrow -i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{Q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}). \tag{3.108}$$

古典的な物理量は，その物理量に対応する量子力学の演算子を波動関数に作用させて表されるので，

$$(\boldsymbol{p})^2 \Rightarrow \{\hat{\boldsymbol{p}}\Psi(\boldsymbol{x})\}^\dagger \{\hat{\boldsymbol{p}}\Psi(\boldsymbol{x})\}, \tag{3.109}$$

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{p} - \frac{Q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\right)^2 &\Rightarrow \left|\left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{Q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\right)\Psi(\boldsymbol{x})\right|^2 \\ &= \left\{\left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{Q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\right)\Psi(\boldsymbol{x})\right\}^\dagger \left\{\left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{Q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\right)\Psi(\boldsymbol{x})\right\}\end{aligned} \tag{3.110}$$

となる．$|\Psi|^2$ をオーダーパラメータとするのであるから，この超伝導を表す自由エネルギーは以下のようになる．

$$\begin{aligned}F(T,V) = \int_V d^3x \Bigg\{&\frac{1}{2}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}))^2 + \frac{1}{2m}\left|\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{Q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\right)\Psi(\boldsymbol{x})\right|^2 \\ &+ V\left(|\Psi(\boldsymbol{x})|^2\right)\Bigg\}, \quad \text{where}\end{aligned} \tag{3.111}$$

$$V\left(|\Psi(\boldsymbol{x})|^2\right) = V_0 + A(T,V)|\Psi(\boldsymbol{x})|^2 + B(T,V)\left(|\Psi(\boldsymbol{x})|^2\right)^2. \tag{3.112}$$

この問題では系の体積 V は一定なので，熱平衡を議論するには (T,V) を指定したヘルムホルツの自由エネルギーを用いて，その最小値を調べることになる．

さてこの自由エネルギーが持つ対称性を群を用いて考えてみよう．先ずゲージ変換の「置き換え規則」は，上記では必要なかったエネルギーの置き換えをも加えると，

$$i\hbar\partial_t \Rightarrow i\hbar\partial_t + Q\phi(t,\boldsymbol{x}) \equiv i\hbar D_t(\phi), \tag{3.113}$$

$$-i\hbar\boldsymbol{\nabla} \Rightarrow -i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{Q}{c}\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}) \equiv -i\hbar\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}) \tag{3.114}$$

となる．この置き換えた後の微分を「共変微分（covariant derivative）」と呼んで，$D_t(\phi)$，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A})$ 等で表す．上記で ∂_t はもちろん t による微分 $\partial/\partial t$ を表している．上記の自由エネルギーを不変とする変換を求めたいのだが，スカ

ラーポテンシャルとベクトルポテンシャルに対するゲージ変換 (3.80), (3.81) はすでに現れている．これと対をなすように，波動関数も下記の変換をすることにしよう．

$$\Psi'(t,\boldsymbol{x}) = e^{\frac{iQ}{\hbar c}\theta(t,\boldsymbol{x})}\Psi(t,\boldsymbol{x}). \tag{3.115}$$

前出の (3.80), (3.81) と今回の (3.115) を合わせて「ゲージ変換」と呼ぶと，この変換で (3.112) の自由エネルギー F は不変となる．なぜならば，

$$D_t(\phi')\Psi'(t,\boldsymbol{x}) = e^{\frac{i}{\hbar c}\theta(t,\boldsymbol{x})}D_t(\phi)\Psi(t,\boldsymbol{x}), \tag{3.116}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}')\Psi'(t,\boldsymbol{x}) = e^{\frac{i}{\hbar c}\theta(t,\boldsymbol{x})}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A})\Psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{3.117}$$

を示すことができるからである．上式で共変微分とせずに通常の微分の ∂_t や $\boldsymbol{\nabla}$ を用いたのでは，このような簡単な変換にはならない．時間あるいは空間微分が $\theta(t,\boldsymbol{x})$ に作用して現れる θ の微分項を打ち消すように，スカラーポテンシャルやベクトルポテンシャルの変換に θ の微分項が現れているのである．このように共変微分を作用させた関数は，もとの関数と同じ変換をする．実は微分した関数がもとの関数と同じ変換をするような微分を，共変微分と定義するのである．その結果，波動関数や波動関数の共変微分の絶対値の二乗がゲージ変換で不変となり，自由エネルギー F も不変となる．ではこの対称性を表す群 G は何であろうか．

(3.115) は複素数である波動関数 Ψ の位相を変える変換である．今変換パラメータ θ の $(t,\boldsymbol{x})$ 依存性を忘れるならば，これは通常の U(1) 変換である．説明しよう．U(n) という群は，n 行 n 列の「ユニタリ行列（unitary matrix)」全体が，かけ算を演算として作る群である．ユニタリ行列 U とは

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I \tag{3.118}$$

を満たす行列のことである．この集団が群の定義を満たすことは直ぐに分かるだろう．ここで † は行列の「エルミート共役（hermitian conjugate)」を取る操作で，行列の全ての要素をその複素共役にした後にその行列を転置する操作である．念のため具体的に書いておくと

$$(U^\dagger)_{ij} = (U^*)_{ji} \tag{3.119}$$

である．今現れているのは U(1) である．つまり 1 行 1 列の行列だから 1 個の複素数 u である．ユニタリ行列の条件から $u^*u = uu^* = |u|^2 = 1$ である．このときは一般的に $u = e^{i\Theta}$ と書けることは知っている．$\Theta = \frac{Q}{\hbar c}\theta$ としているが，U(1) であることに違いはない．ここで本質的に重要なことは，この U(1) 群のパラメータあるいは U(1) 変換のパラメータが時間と空間の座標 $(t,\boldsymbol{x})$*1) によって異なってもよいとしていることである．しかし運動を記述す

*1)　今後これを「時空間の座標（space-time coordinates)」と呼ぼう．

るためには，異なる時空間の差，時間と空間による微分が必要となる．異なる U(1) 変換を行なう異なる 2 点の間で微分をうまく定義しないと，全体としてこのような時空間の座標に依存する変換で系は不変とはならない．不変にするためには，電磁場を記述するスカラーポテンシャルやベクトルポテンシャルを導入し，異なる 2 点の間の微分を共変微分としなければならない．いわば異なる点の U(1) 変換の相違をスカラーポテンシャルやベクトルポテンシャルを導入して辻褄を合わせているということになる．このスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを「ゲージ場（gauge field）」と呼ぶが，数学者は「接続 (connection)」と呼ぶ．異なる 2 点をつなぐものという意味である．

上述の共変微分は量子力学で波動関数を用いてそれを電磁場と相互作用させようとするときに自然に現れるが，それはシュレーディンガーが波動関数をもとに量子力学を定式化した 1926 年以降のことである．実はそれ以前の 1918 年にヘルマン・ワイルが「時間・空間・物質（Raum-Zeit-Materie）」という本[5]の中で接続の概念をもとに電磁気理論と重力理論を統一的に理解しようとした．その中で「物差しの目盛り（calibration）」を時空の各点で変更したらどうなるかを考えた．場所 $\boldsymbol{x}$ における物差しの長さを $l(\boldsymbol{x})$ とするとき目盛りを場所毎に変更するには

$$l'(\boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x})l(\boldsymbol{x}), \tag{3.120}$$

とすればよい．ワイルは「目盛り（calibration）」と呼んだが，物差しの目盛りは別名「ゲージ（gauge）」とも呼ばれる．目盛りを取り替えても不変としたいので，ワイルは「目盛り不変性（calibration invariance）」を持つ理論を構築しようとした．その概念が今日「ゲージ不変性（gauge invariance）」と呼ばれるようになったのである．ワイルは変換の辻褄を合わせるためには，ゲージ場 $\boldsymbol{\phi}$ を導入し共変微分とゲージ場に対するゲージ変換を以下のように定義すればよいことはもちろん知っている．

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\phi}) \equiv \boldsymbol{\nabla} - \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}), \tag{3.121}$$

$$\boldsymbol{\phi}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\nabla} \ln \lambda(\boldsymbol{x}). \tag{3.122}$$

この l を時空間の距離と関係付けると重力理論の拡張理論が得られるが，ここではそれには立ち入らないことにしよう．

ギンツブルグ–ランダウ理論に戻ろう．自由エネルギー (3.112) の極小値を求めてみよう．極小値は次の式で与えられる．

$$(1)\ \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})} = 0, \quad (2)\ \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x})} = 0, \quad (3)\ \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{\Psi}^{\dagger}(\boldsymbol{x})} = 0. \tag{3.123}$$

先ず (1) 式より

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}, \quad \text{where} \tag{3.124}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = -\nabla^2 \boldsymbol{A} + \nabla(\nabla \boldsymbol{A}), \tag{3.125}$$

$$\boldsymbol{j} = \frac{-i\hbar Q}{2mc}\left(\Psi^\dagger \boldsymbol{D}(\boldsymbol{A})\Psi - \boldsymbol{D}(\boldsymbol{A})\Psi^\dagger\Psi\right) = \boldsymbol{j}_n + \boldsymbol{j}_s, \quad \text{where} \tag{3.126}$$

$$\boldsymbol{j}_n = \frac{-i\hbar Q}{2mc}\left(\Psi^\dagger \nabla\Psi - \nabla\Psi^\dagger\Psi\right), \tag{3.127}$$

$$\boldsymbol{j}_s = -\frac{Q^2}{mc^2}|\Psi|^2 \boldsymbol{A}. \tag{3.128}$$

ここで j_n は通常の（normal）電流密度で，j_s は超伝導で重要な働きをする電流密度なので super current と呼ばれる．$\langle|\Psi|^2\rangle = \eta^2 =$ 定数 とした場合，この式はロンドン兄弟が超伝導のマイスナー効果を説明するために導入した「ロンドン方程式」になる．「マイスナー効果」は少し先で説明する．第 2 式 (2) と第 3 式 (3) に移ろう．両者は同じ式を与える．即ち

$$\frac{1}{2m}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}))^2\Psi + \frac{\delta V}{\delta \Psi^\dagger} = 0, \quad \text{where} \tag{3.129}$$

$$\frac{\delta V}{\delta \Psi^\dagger} = A(T)\Psi + 2B(T)|\Psi|^2\Psi \tag{3.130}$$

となる．この 2 つの方程式 (3.124) (3.129) を解けばよい．

最初に 3 次元空間全体に超伝導物質が一様に存在する場合を考えよう．高温側 ($T > T_c$) では，$A(T)$ も $B(T)$ も共に正である．従って，(3.129) の解は $\langle\Psi\rangle = 0$ である．自由エネルギーが極小となる値を $\langle\ \rangle$ で囲むこととする．もちろん以前のように $*$ を付けて表してもよい．これを (3.124) 式に代入すると $\langle\boldsymbol{B}\rangle = 0$ となる．次に低温側 ($T < T_c$) を考えよう．ここでは $A(T)$ が負となる．従って，(3.129) の解 $\langle\Psi\rangle$ は $\boldsymbol{x}$ に依らない定数（constant）であるが，$\langle|\Psi|\rangle = \sqrt{-A(T)/2B(T)}$ であれば，どんな値を取ってもよい．(3.124), (3.129) の解は，$\langle\boldsymbol{B}\rangle = \langle\boldsymbol{A}\rangle = 0$ となる．これでは高温側と低温側の違いが明らかでないので超伝導現象が理解できたといえないだろう．

そこでギンツブルグとランダウは，$z = x_3$ 軸の正の部分に超伝導体を置くが z が負の部分は超伝導体を置かずに真空とし，外部から境界面 (x, y) 平面に添って $y = x_2$ 方向に磁場を掛けることとした．このときベクトルポテンシャルは $x = x_1$ 方向に取れる．超伝導電子の有効波動関数 Ψ と合わせて，以下の仮定の下に方程式を解こう．

$$\boldsymbol{B} = (0, B(z), 0), \tag{3.131}$$

$$\boldsymbol{A} = (A(z), 0, 0), \quad \text{それ故} \quad B(z) = \frac{dA}{dz}, \tag{3.132}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \left(-\frac{d^2 A}{dz^2}, 0, 0\right), \tag{3.133}$$

$$\Psi = \Psi(z) \text{ で実数とすると } \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}. \tag{3.134}$$

従って 2 つの方程式 (3.124), (3.129) は

$$\frac{d^2 A}{dz^2}(z) = \frac{Q^2}{mc^2}\Psi(z)^2 A(z), \tag{3.135}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dz^2}(z) = \left(\frac{Q^2}{2mc^2}A(z)^2 + A(T)\right)\Psi(z) + 2B(T)\Psi(z)^3 \tag{3.136}$$

であるが，これは超伝導体の内部の方程式なので $z > 0$ で成り立つ．一方 $z < 0$ は真空なので $\Psi(\boldsymbol{x})$ は存在しない．従ってそこでの方程式は

$$\frac{d^2A}{dz^2}(z) = 0, \text{ and } \Psi(z) = 0 \tag{3.137}$$

となる．$z \sim \infty$ での振る舞いは

$$A(z)_{z\to\infty} \sim A_0 e^{-z/\lambda_L}, \tag{3.138}$$

$$B(z)_{z\to\infty} \sim B_0 e^{-z/\lambda_L}, \tag{3.139}$$

$$\Psi(z)_{z\to\infty} \sim \langle\Psi\rangle - C_0 e^{-z/\xi_c}. \tag{3.140}$$

ここで λ_L を「ロンドンの侵入長（London penetration depth)」，ξ_c を「コヒーレンス長（coherence length)」と呼ぶと，

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{Q^2}{mc^2\langle\Psi\rangle^2}}, \tag{3.141}$$

$$\xi_c = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4m\langle\Psi\rangle^2}}, \quad \text{where} \tag{3.142}$$

$$\langle\Psi\rangle = \sqrt{\frac{-A(T)}{2B(T)}} \tag{3.143}$$

であることが分かる．$z < 0$ での解は

$$A(z) = \text{const} + zB_{\text{ext}}, \tag{3.144}$$

$$B(z) = B_{\text{ext}}, \tag{3.145}$$

$$\Psi(z) = 0. \tag{3.146}$$

$B_{\text{ext}} = B_0$ は外部から y 方向に掛けた磁場である．磁場は超伝導体の内部に侵入すると急速に減少する．これをマイスナー効果という．λ_L 侵入すると $1/e = 1/2.73\cdots$ に減少するので侵入の目安を決める量である．従ってこの長さを侵入長という．一方 Ψ は，超伝導体のずっと奥では一定の値であるが，表面に ξ_c 位近づくと一定の値から大きくずれる．このように一定の値に揃っている（coherent）ものが揃わなくなる長さのスケールを表しているのでコヒーレンス長という．

さて高温側と低温側での対称性の破れを調べてみよう．出発点となる (3.111) 式の自由エネルギー $F(T)$ が U(1) ゲージ対称性に関して不変であることはすでに確認している．ゲージ変換はまとめると

$$\Psi(\boldsymbol{x}) \to \Psi'(\boldsymbol{x}) = e^{\frac{iQ}{\hbar c}\theta(\boldsymbol{x})}\Psi(\boldsymbol{x}), \quad \text{and} \tag{3.147}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nabla}\theta \tag{3.148}$$

である．この変換を自由に行える場合にはゲージ不変になる．熱力学的に実現される状態は自由エネルギーが最小となる状態であり，これを「基底状態 (ground state)」と呼ぶが，この基底状態における自由エネルギーが U(1) ゲージ不変であるかどうかは分からない．$T > T_c$ では $\langle\Psi\rangle = 0, \langle\boldsymbol{B}\rangle = \mathbf{0}$ であって，$\langle F\rangle = 0$ となるので不変である．しかし $T < T_c$ では，$\langle\Psi\rangle \neq 0$ は特定の値を取る．$|\langle\Psi\rangle|^2 = -A(T)/2B(T)$ を満たすものなら何でもよいのだけれども，この半径 $\sqrt{-A(T)/2B(T)}$ の円周上の特定の一点を選ばないと基底状態は決まらない．基底状態は円周上の全ての点に対応して無限に多く存在するが，基底状態を 1 つ選んだ暁には，$\langle\Psi\rangle$ が特定の値を取ることになり，(3.148) で表されたゲージ変換は実行できない．つまり U(1) ゲージ対称性は低温側 $T < T_c$ で破れている．

第 4 章
相対論的に記述される系の対称性とその破れ

この章では先ず電磁気を相対論的に書き直す．マクスウェルの方程式はスピン 1 の光子（フォトン，photon）の運動を記述する方程式であるが，完全に相対性理論に従った方程式である．次に相対論的に記述されたスカラー粒子（スピン 0 の粒子，例はフォノン，中間子（meson）やヒッグス粒子（Higgs particle））の運動方程式を説明した後に，スピン 1/2 の粒子（例は電子，陽子，中性子やクォーク等）の運動を記述するディラック方程式を導入する．

この章で説明したいことは，電子，陽子，中性子やクォーク等，スピン 1/2 の粒子の質量を対称性の破れとして与える理論であり，1960 年に南部陽一郎（Yoichiro Nambu）によって提案された理論である[9]．南部はこのときに「対称性の自発的破れ（spontaneously broken symmetry）」という概念を普遍的な概念として提唱し，その性質を明らかにした．それを説明するためにはスピン 1/2 の粒子の運動方程式を知っておく必要であり，かつ南部が参考とした「超伝導の微視的理論（BCS 理論）」[6] も理解しておかなければならない．また古典論からのずれが重要となるので，量子的揺らぎあるいは統計的揺らぎを取り扱う技術も学ばなければならない．少しハードな章かもしれないが，頑張れば現代物理学を理解するために必要な様々なことが学べるだろう．

4.1　電磁気の相対論的記述

電磁気を相対論的に書き直すと見通しが良くなることは前に少しお話をした．相対性理論とは，物体の速度が高速度に近くなると，時間座標 t は空間座標 $\boldsymbol{x}$ と独立して進むのではなく，時間と空間を統合した 4 次元の世界の中で時間発展をするというものである．

時間と空間の座標 $(t, \boldsymbol{x})$ を一まとめにして 4 次元の空間座標 x^μ とし，時間と空間座標に関する微分を 4 次元の微分 ∂_μ として導入しよう．0 を時間成分とし，$1, 2, 3$ を空間成分として，時間と空間を完全に対等に扱おうとするので

ある．これを「4 次元時空 (four dimensional space-time)」という．$(\phi, \boldsymbol{A})$ を一まとめにして 4 次元のベクトルポテンシャル $A^\mu(x)$ とし，$(\rho, \frac{1}{c}\boldsymbol{j})$ を一まとめにして 4 次元の電流密度 $j^\mu(x)$ としよう．ここで座標として (x) と書いたものは，時間と空間をまとめた 4 次元時空の座標 x^μ のことである．

添字をギリシャ文字の μ，ν としたときは添字は $0, 1, 2, 3$ を走り，空間成分の $1, 2, 3$ に限定したいときにはローマ字 i, j などの添字を使うのが慣例である．$x^\mu, x_\mu, \partial^\mu, \partial_\mu, A^\mu, A_\mu, j^\mu(x), j_\mu(x)$ を以下で定義する．混乱するといけないので，元の空間座標を (x, y, z) とし，ベクトルポテンシャルの成分も x 成分，y 成分，z 成分と記載しよう．

$$x^0 = x_0 \equiv ct\ ;\ x^1 = -x_1 \equiv x,\ x^2 = -x_2 = y,\ x^3 = -x_3 \equiv z, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}&\partial_0 = \partial^0 \equiv \frac{\partial}{c\partial t};\\ &\partial_1 = -\partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x},\ \partial_2 = -\partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y},\ \partial_3 = -\partial_3 \equiv \frac{\partial}{\partial z},\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}&A^0(x) = A_0(x) \equiv \phi(x);\ A^1(x) = -A_1(x) \equiv \boldsymbol{A}_x(x),\\ &A^2(x) = -A_2(x) \equiv \boldsymbol{A}_y(x),\ A^3(x) = -A_3(x) \equiv \boldsymbol{A}_z(x),\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}&j^0(x) = j_0(x) \equiv \rho(x);\ j^1(x) = -j_1(x) \equiv \frac{1}{c}\boldsymbol{j}_x(x),\\ &j^2(x) = -j_2(x) \equiv \frac{1}{c}\boldsymbol{j}_y(x),\ j^3(x) = -j_3(x) \equiv \frac{1}{c}\boldsymbol{j}_z(x).\end{aligned} \tag{4.4}$$

補足しよう．4 成分を持つ 4 次元のベクトルには，上付きの添字を持つ「反変ベクトル (contravariant vector)」と下付きの添字を持つ「共変ベクトル (covariant vector)」がある．時間座標は c を掛けると空間座標と同じ長さの次元を持つので，ct を 4 次元座標の第 0 成分とするのは適切である．通常の時間と空間座標は反変ベクトル x^μ として一つにまとめる．ある量の添字を上下させるとき，その添字が 0 ならば，その量は符号を変えないが，添字が 1〜3 の場合にはその量の符号を変えるというのが原理である．座標は上付きの反変ベクトル x^μ を基本とし，微分は下付きの共変ベクトル ∂_μ を基本として，添字を上下させればよい．2 つ以上添字を持つ量を「テンソル (tensor)」と呼ぶが，例えば $T_{\mu\nu\lambda}$ があったとしよう．このとき

$$T_{012} = T^0{}_{12} = -T^{01}{}_2 = -T^0{}_1{}^2 = T^{012} \tag{4.5}$$

である．これで添字の上げ下げの仕方は分かっただろう．時空座標の基本は上付きの添字を持つ反変ベクトル x^μ であるが，別途下付きの添字を持つ共変ベクトル x_μ を準備する理由は，内積を必ず上付きの添字と下付きの添字で行うことにしたいからである．例えば

$$x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu = (ct)^2 - (\boldsymbol{x})^2, \tag{4.6}$$

$$
\begin{aligned}
\partial^\mu \partial_\mu &= \partial_\mu \partial^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} \partial^\mu \partial_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu \partial^\mu \\
&= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \boldsymbol{\nabla}^2 = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \Delta, \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^\mu B_\mu &= A_\mu B^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} A_\mu B^\mu \\
&= A_t B_t - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

である．和を取る記号 $\sum$ は大抵省略する．同じギリシャ文字の添字で，1 つが上付きもう 1 つが下付きで現れた場合には，暗黙の内にその添字について 0 から 3 まで和を取ることとする．これを「アインシュタインの約束 (convention)」という．

先ず $F_{\mu\nu}(x)$ を定義しよう．

$$
F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x). \qquad (4.9)
$$

ローテーションの 4 次元への拡張である．$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ なので独立な成分は 6 個である．これが電場の 3 成分と磁場の 3 成分になる．成分を確認すると電場と磁場を全て含んでいることが分かる．

$$
F_{0i} = -F_{i0} = -F^{0i} = \boldsymbol{E}_i, \qquad (4.10)
$$

$$
F_{ij} = -F_{ji} = F^{ij} = -F^{ji} = -\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{B}_k. \qquad (4.11)
$$

但しここで使ったイプシロンシンボル ε_{ijk} は次のように定義される．添字にローマ字を用いたので i, j, k は 1〜3 を走る．添字の 2 つが等しいときは $\varepsilon_{ijk} = 0$．添字が全部異なる場合には $\varepsilon_{123} = 1$ から出発し，添字の 2 つを入れ替える度に -1 を掛ける．例えば，$1 = -\varepsilon_{213} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{132} = \varepsilon_{231}$ 等である．少し努力すると，式 (4.9) は，電磁場をスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルで表す式と同じであることが分かる．ゲージ変換を 4 次元のベクトルポテンシャルで表すと

$$
A_\mu(x) \Rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x) \qquad (4.12)
$$

となる．

マクスウェルの方程式の電荷に対するガウスの法則と修正されたアンペールの法則は

$$
\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x), \qquad (4.13)
$$

となる．残りの磁場に関するガウスの法則とファラデーの電磁誘導の法則は 4 次元のベクトルポテンシャルを導入すると自動的に成り立った．これを式で表すと

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\nu F_{\lambda\rho} = 0 \tag{4.14}$$

となる．ここで現れたイプシロンシンボルは 4 次元の場合のもので，例えば $\varepsilon^{0123} = 1$ から出発して添字を 2 つ入れ替える毎に符号を替えることにする．もちろん同じ添字の場合はゼロである．落ち着いて計算するとこれが磁場に関するガウスの法則とファラデーの電磁誘導の法則であることが分かり，しかも $F_{\mu\nu}$ を 4 次元のベクトルポテンシャルで表した場合には恒等的にゼロであることも確認できる．その際微分の順序は入れ替えても答えが同じだとする．つまり $\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu$ は通常成り立つからである．このように電磁気の基本方程式は，4 次元の記述をすると極めてシンプルな方程式となる．(4.13) の左辺を ∂_ν で微分して ν で暗黙の内に加え合わせるとゼロになる．従って

$$\partial_\nu j^\nu = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla j}\right) = 0 \tag{4.15}$$

が得られる．これを電荷の保存則という．原点を中心とする立方体を考える．一辺を 2ε として辺が座標軸に平行とする．x 軸に垂直な 2 つの面 $(x = -\varepsilon)$ と $(x = \varepsilon)$ から単位時間に単位面積当たり流れ出る電荷が $-j_x(x = -\varepsilon)$ と $j_x(x = \varepsilon)$ である．符号に注意しよう．従って立方体の 6 つの面から単位時間当たり流れ出る電荷は

$$\begin{aligned}&\{(j_x(x=\varepsilon) - j_x(x=-\varepsilon)) + (j_y(y=\varepsilon) - j_y(y=-\varepsilon)) \\ &+ (j_z(z=\varepsilon) - j_z(z=-\varepsilon))\}\,(2\varepsilon)^2 = (2\varepsilon)^3\boldsymbol{\nabla j}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

流れ出た分，立方体内部の電荷は減少する．減少する電気量は

$$-(2\varepsilon)^3\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{4.17}$$

であるので，上記の電荷の保存則を示すことができた．

ここで 4 次元時空の対称性である「ローレンツ変換（Lorentz transformation)」を説明しよう．これはローレンツがマクスウェル方程式の対称性として発見したものである．

時空間の一点を P とする．P をある座標系 O で見ると座標は (x^μ) であった．同じ点 P を別の座標系 O' で見た場合には，座標の値は異なるだろうからそれを (x'^μ) とする．(x'^μ) は (x^μ) で表されるが，その変換式は 2 つの座標系 O と O' の相互関係に依って決まる．今この座標変換を線形（linear）としよう．線形変換（linear transformation）とは変換式が 1 次式で表される変換のことである．

$$x^\mu \to x'^\mu = a(\alpha)^\mu{}_\nu x^\nu \tag{4.18}$$

としよう．これを仮にローレンツ変換と呼ぼう．アインシュタインの約束に従って ν は暗黙の内に加えている．係数 $a^\mu{}_\nu$ は，1 つのパラメータ α に依存

するとしたが，これは座標系 O と O' の相互関係を与えるパラメータである．$(a^{\mu}{}_{\nu})$ を μ 行 ν 列成分とする行列を $\overline{A}$ とする．添字の上げ下げの規則を，係数 a の 2 つの添字に対しても適応すると

$$x_{\mu} \to x'_{\mu} = a(\alpha)_{\mu}{}^{\nu} x_{\nu} \tag{4.19}$$

となることが分かる．添字を上下させるときその添字が 1〜3 ならば符号を変えるという規則に従うことにする．$(a_{\mu}{}^{\nu})$ を μ 行 ν 列成分とする行列を $\underline{A}$ としよう．

共変ベクトルと反変ベクトルを掛け合わせたとき，上付きの添字と下付きの添字が同じならば，その添字を 0 から 3 まで走らせて加え合わせると約束をした．このようにした積を仮のローレンツ変換で不変としよう．即ち

$$x^{\mu} x_{\mu} = (ct)^2 - (\boldsymbol{x})^2 = x'^{\mu} x'_{\mu} = (ct')^2 - (\boldsymbol{x}')^2. \tag{4.20}$$

この条件は変換前に $(ct)^2 - (\boldsymbol{x})^2$ ならば変換後にも $(ct')^2 - (\boldsymbol{x}')^2$ である．原点から出発して t 秒後に $\boldsymbol{x}$ に到達する光速度 c で進む粒子を変換された座標系で見た場合でも，その粒子は光速度 c で進むことになる．これが「光速度不変の原理」である．この要請を具体的に書き下すと

$$a^{\mu}{}_{\nu} a_{\mu}{}^{\lambda} = \delta^{\lambda}{}_{\nu} \tag{4.21}$$

となる．従って変換の係数 a はこの式を満たさなければならない．行列 $\overline{A}$ の逆行列を $(\overline{A})^{-1}$ とし，その μ 行 ν 列成分を $(a^{-1})^{\mu}{}_{\nu}$ としよう．$(\overline{A})(\overline{A})^{-1} = 1$ を成分で書くと

$$a^{\mu}{}_{\nu} (a^{-1})^{\nu}{}_{\rho} = \delta^{\mu}{}_{\rho} \tag{4.22}$$

となる．(4.21) の右側から $(a^{-1})^{\nu}{}_{\rho}$ を掛けて (4.22) を使うと

$$(a^{-1})^{\lambda}{}_{\rho} = a_{\rho}{}^{\lambda} \tag{4.23}$$

が分かる．反変ベクトルの変換行列 $\overline{A} = (a^{\lambda}{}_{\rho})$ の逆行列は，行列 $\overline{A}$ の行の添字 λ を下付きにし，列の添字 ρ を上付きにして得られる共変ベクトルの変換行列 $\underline{A} = (a_{\lambda}{}^{\rho})$ で行と列を入れ替えたもの（転置，transposed）に等しい．

$$(\overline{A})^{-1} = \underline{A}^{T}. \tag{4.24}$$

この条件 (4.24) を満たす行列を作ってみよう．簡単のために座標軸を (x^0, x^1) に限定して 2 次元の座標系の取り替えを調べよう．そのとき 2 次元反変ベクトルの変換行列 $\overline{A} = (a^{\lambda}{}_{\rho})$ を

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

とすると，その逆行列は

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

であることが実際に掛けてみると分かる．また元の $(a^{\lambda}{}_{\rho})$ の行と列の上付きと下付きを逆にして，更に行と列と入れ替えた行列 $\underline{A}^T = (a_{\rho}{}^{\lambda})$ は

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

である．この 2 つの行列を等しいと置くと，

$$a^2 = d^2, \quad b^2 = c^2, \quad ab = cd, \quad (ad-bc)^2 = 1 \tag{4.28}$$

が得られる．この条件を満たす $(a^{\lambda}{}_{\rho})$ は次の 2 つであることが分かる．即ち

$$A_1 = \pm \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{or} \tag{4.29}$$

$$A_2 = \pm \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ \sinh\alpha & -\cosh\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

ここで用いた cosh と sinh は次のように定義されるハイパーボリックコサイン（hyperbolic cosine）とハイパーボリックサイン（hyperbolic sine）である．ch あるいは sh と書くこともよくある．これらは

$$\cosh\alpha = \text{ch } \alpha \equiv \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}, \quad \sinh\alpha = \text{sh } \alpha \equiv \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2} \tag{4.31}$$

で定義され，$(\cosh\alpha)^2 - (\sinh\alpha)^2 = 1$ を満たすことは定義から直ぐに分かる．

ローレンツ変換のパラメータを 2 つの座標系の相互関係から決めることは少し先に延ばして，先ずマクスウェルの方程式が相対論的に不変，即ちローレンツ変換で不変とできることを説明しよう．様々な量に添字が付いていて，添字に上付き（反変）と下付き（共変）がある．添字がないものをスカラー（scalar），添字が 1 つのものをベクトル（vector），添字が 2 つ以上のものをテンソル（tensor）と呼ぶことは前に述べた．添字の個数を「階数（order）」という．一般的のテンソルは $T^{\mu,\nu,\cdots}{}_{\lambda,\rho,\ldots}(x)$ と書くことができるだろう．実際にテンソルと呼ぶためには，ローレンツ変換によって以下の変換をすることを確かめる必要がある．即ちテンソルであるためには以下の変換則を満たさなければならない．

$$\begin{aligned} &T^{\mu,\nu,\cdots}{}_{\lambda,\rho,\ldots}(x) \to T'^{\mu',\nu',\cdots}{}_{\lambda',\rho',\ldots}(x') \\ &= a^{\mu'}{}_{\mu} a^{\nu'}{}_{\nu} \cdots a_{\lambda'}{}^{\lambda} a_{\rho'}{}^{\rho} \cdots T^{\mu,\nu,\cdots}{}_{\lambda,\rho,\ldots}(x). \end{aligned} \tag{4.32}$$

ここで変換後には座標 (x') が現れ，変換前には座標 (x) が現れることに注意しよう．座標の値が異なるのは観測している座標系が異なるからである．変換式は同じ点 P における量 T を 2 つの座標系で見て比較していることに注意しよう．それぞれの添字が上付き（反変）あるいは下付き（共変）の変換規則に従

うことを書いた式である．

最初にチェックすべきことは，∂_μ が下付きの添字の共変ベクトルであることである．そのためには座標変換を逆にする必要がある．即ち

$$x^\mu = (a^{-1})^\mu{}_\nu x'^\nu = x'^\nu a_\nu{}^\mu. \tag{4.33}$$

これを使うと微分の変換規則が得られる．即ち，

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu = (a^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu = a_\mu{}^\nu \partial_\nu. \tag{4.34}$$

これは ∂_μ が共変ベクトルであることを示している．従って ∂^μ は反変ベクトルとなる．

即ち $A^\mu(x)$ と $j^\mu(x)$ が反変ベクトルであるならば，$A_\mu(x)$ と $j_\mu(x)$ は共変ベクトルとなる．この場合 $F_{\mu\nu}$ は 2 つの添字が共変のテンソルとなり，$\partial_\mu F^{\mu\nu}$ と j^ν は共に反変ベクトルとなる．従ってある座標系 O で $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ が成り立つならば，別の座標系 O' でも同じ方程式が成立することが分かる．

$$\begin{aligned}
&\partial'_{\mu'} F'^{\mu'\nu'}(x') - j'^{\nu'}(x') = a_{\mu'}{}^\mu \partial_\mu a^{\mu'}{}_\lambda a^{\nu'}{}_\rho F^{\lambda\rho}(x) - a^{\nu'}{}_\rho j^\rho(x) \\
&= a^{\nu'}{}_\rho \left(\partial_\lambda F^{\lambda\rho}(x) - j^\rho(x)\right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

変換後には新しい座標系で記載した同じマクスウェルの方程式 $\partial'_\mu F'^{\mu\nu}(x') = j'^\nu(x)$ が成り立つ．もちろんその場合には，変換後の 4 次元のベクトルポテンシャルと変換後の 4 次元の電流密度を用いて記述する必要がある．ベクトルポテンシャルが変換されるのだから電磁場も変換されることになる．電磁場の変換規則は

$$F'_{\mu\nu}(x') = a_\mu{}^\lambda a_\nu{}^\rho F_{\lambda\rho}(x) \tag{4.36}$$

である．つまりテンソル（2 階のテンソル）として変換する．これさえ覚えておけば，必要となった場合に電磁場の変換測を具体的に書き出すことはそれほど難しくないだろう．

これまでの説明を聞いた人の中で，上記の記述をもっと一般化できると気付く人は多いのではないだろうか．つまり微分の変換則を示すところで変数変換を使うが，これは線形変換でなくても成り立つからである．むしろ一般的に考えた方が分かり易い．では x^μ の変換則をどうするかだが，上記の議論は結局のところ

$$a^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}, \tag{4.37}$$

$$a_\mu{}^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \tag{4.38}$$

を考えていることに相当する．これらは線形の変換であるが，係数が時空の場所によって異なることが許されるのである．基本となる反変ベクトルは dx^μ

であり，基本となる共変ベクトルは ∂_μ と考えることができて，一般的な変数変換の公式

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \tag{4.39}$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \tag{4.40}$$

と考えられる．その特殊な場合（一次変換の場合）がローレンツ変換である．従って，線形でない一般的な変換

$$x^\mu \to x'^\mu = x'^\mu(x) = f^\mu(x), \tag{4.41}$$

$f^\mu(x)$ は 1 次式とは限らず微分さえできればどのような関数でもよいので，同じ議論を遂行することができる．この (4.41) を「一般座標変換 (general coordinate transformation)」あるいは数学的には「微分同相変換 (diffeomorphism)」という．この場合テンソルの変換は以下のようになる．

$$T'^{\mu',\nu',\cdots}{}_{\lambda',\rho',\ldots}(x') = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\nu} \cdots \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^{\rho'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^{\lambda'}} \cdots \times T^{\mu,\nu,\cdots}{}_{\lambda,\rho,\ldots}(x). \tag{4.42}$$

物理法則の右辺と左辺を同じテンソルで書きさえすれば，物理法則は「一般座標変換の下で不変（general covariance）となる．

さて一次変換の場合には，$x^\mu x_\mu$ をローレンツ不変とした．この要請は光速度不変の原理を保証している．これに相当する要請を一般座標変換の場合にも欲しい．場所毎に異なる係数で変換しているので，$x^\mu x_\mu$ に相当するものは微視的な $dx^\mu dx_\mu$ となるだろう．そのとき添字を上げ下げする規則はどうなるだろうか．場所毎にことなる 2 階のテンソル $g_{\mu\nu}(x)$ および $g^{\mu\nu}(x)$ を導入して

$$dx_\mu = g_{\mu\nu}(x) dx^\nu, \quad dx^\mu = g^{\mu\nu}(x) dx_\nu, \quad \text{more generally} \tag{4.43}$$

$$T^{\cdots}{}_{\cdots\mu\cdots}(x) = g_{\mu\nu}(x) T^{\cdots}{}_{\cdots}{}^{\nu}{}_{\cdots}(x), \tag{4.44}$$

$$T^{\cdots\mu\cdots}{}_{\cdots}(x) = g^{\mu\nu}(x) T^{\cdots}{}_{\nu}{}^{\cdots}{}_{\cdots}(x) \tag{4.45}$$

とすればよいが，テンソルの変換性を保証するためには $g_{\mu\nu}(x)$ と $g^{\mu\nu}(x)$ もテンソルの変換をするものでなければならない．即ち

$$g'_{\mu'\nu'}(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu'}} g_{\mu\nu}(x), \tag{4.46}$$

$$g'^{\mu'\nu'}(x') = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu}(x). \tag{4.47}$$

このとき

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\mu \tag{4.48}$$

は全ての添字が潰れているので一般座標変換不変である．これは曲がった空

間の微小な長さの二乗 ds^2 を μ 方向の微小な長さ dx^μ と ν 方向の微小な長さ dx^ν を用いて表す式となっている．この $g_{\mu\nu}(x)$ を「計量テンソル（metric tensor)」と呼ぶ．このように計量テンソルを導入して曲がった空間を記述する幾何学を「リーマン幾何（Riemanian geometry)」という．この曲がった空間を記述する方法は，リーマン（Riemann）が 1854 年にゲッチンゲン大学において教授資格を得るため行った講演の中で提案されたが，この講演を聞いたガウスが高く評価したとされている．ガウスは以前曲がった空間の曲がる度合いを数学的に表現することを考えたからである．これは今日ガウス曲率と呼ばれている．リーマンは曲がった空間を記述する一般的な方法を提案したのであった．

さて計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ から，様々なテンソルを作ることができるが，それを実行して曲がった空間を用いて重力理論を作ったのがアインシュタインである．1915 年のことである．これを「一般相対性理論（general theory of relativity)」と呼び，ローレンツ変換をもとにした線形変換のみに限った場合を「特殊相対性理論（special theory of relativity)」と呼ぶが，一般と特殊の使い方は理解できるだろう．相対性理論とは 1 つの座標系から別の座標系に移っても，物理法則が同じ方程式で記述できて，物理法則が座標系の取り方に依存しないという理論である．座標系の取り方は単に相対的なもの（relative）に過ぎないという意味で相対性理論と呼ばれる．

最後に残った問題は，ローレンツ変換を具体的に記載すること，即ちパラメータ α の意味は何かということである．電磁気はローレンツ変換で不変である．今一人の観測者から見た座標が (x^1, x^2, x^3) であったとしよう．この座標系を O，あるいはこの観測者（observer）を O あるいは場合によっては座標系の原点（origin）も O で表すことがよくある．この O に対して x^1 の正の方向に一定速度 V で動いている観測者，あるいは座標系，あるいはその座標系の原点を O' としよう．O' は座標系 O 上で一定速度で動くので $x'^1 = 0$ は $x^1 - \frac{V}{c}x^0 = 0$ を満たす．従って

$$x'^1 = \gamma(V/c)\left(x^1 - \frac{V}{c}x^0\right) = \pm(\cosh\alpha x^0 - \sinh\alpha x^1) \tag{4.49}$$

となる．これから

$$\tanh\alpha = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha} = \frac{V}{c}. \tag{4.50}$$

これで α は座標系の間の相対速度 V で決まったので，$\cosh\alpha$ と $\sinh\alpha$ も決まる．即ち，

$$\cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \tag{4.51}$$

$$\sinh\alpha = \frac{V/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \tag{4.52}$$

である．V をゼロにすると座標系 O' は元の座標系 O に一致する．このとき $x'^{\mu} = x^{\mu}$ と考えてよいだろう．そう考えると，幾つか可能性があったが結局答えは 1 つになる．即ち

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & -\frac{V/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \\ -\frac{V/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

と定まった．これでローレンツ変換が導出できた．

この変換を電荷密度と電流密度からなる 4 次元カレント $j^{\mu}(x)$ に適用してみよう．$j^{\mu}(x)$ を反変ベクトルと仮定し，O' の原点に点電荷を置くとしよう．O' 系では電荷密度のみが存在するので $j'^0(x') \neq 0$ であるが，電流は流れないので $\boldsymbol{j}'^1(x') = 0$ である．このとき

$$j^0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} j'^0(x'), \tag{4.54}$$

$$j^1(x) = \frac{V/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}} j'^0(x') = \frac{V}{c} j^0(x). \tag{4.55}$$

ここでは O 座標系の物理量を O' 系の物理量で表したかったので，O 座標系が O' 座標系に対して x'^1 軸の正の方向に $-V$ で動いていると考えて計算をした．O 座標系から見ると電荷が x'^1 軸の正の方向に V で動いているので，電流 $j^1(x) = \rho(x)V$ は，電流と電荷密度の正しい関係式である．但し電荷密度は $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\rho'(x')$ となり，静止している電荷密度よりも動いている電荷密度の方が大きくなっている．ローレンツは，動くとその方向の長さが $\sqrt{1-(V/c)^2}$ だけ縮むと考えた．これを「ローレンツ収縮（Lorentz contraction）」という．縦に縮んだ分体積が小さくなるので，電荷密度がその分大きくなったのである．このように現象を正しく再現しているので 4 次元カレント j^{μ} を反変ベクトルとする仮定は正しいであろう．

以上の説明では，単にマクスウェル方程式がローレンツ変換で不変であることを理解し，その変換によって電磁気現象が不変に記述されることが分かったに過ぎない．それは電磁気現象にのみ適用される特殊な不変性であるかも知れず，自然界の普遍的な原理であるかどうかは分からない．これが自然界の普遍的原理であることを明らかにしたのがアインシュタインの特殊相対性理論であり，1903 年の論文においてであった．アインシュタインは先ず異なる座標系に住んでいる観測者が用いる時計と物差しは観測者毎に違っていてよいとする．次に「光速度不変の原理」と物理法則が座標系の取り方に依らず同じ法則として成り立つという「相対性原理」の 2 つを原理として，進行方向に垂直に置いた鏡と水平に置いた鏡による光の反射を考えることによって，ローレンツ変換を一般的に導出することに成功した．この辺りの創意と工夫は常人には到底思い付かないものであり，画期的なブレークスルーであった．これに関しては現論文を参照されたい．幸い岩波文庫に内山龍雄訳の原論文が載っている．アイ

ンシュタインの特殊相対性理論および一般相対性理論の原論文はいずれも，一般の解説書と比較しても格段に論旨が明確でありかつ分かり易いので，是非一読されることを勧めたい．

マクスウェルの方程式を 4 次元のベクトルポテンシャルで表すと

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = (\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu(x) - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu(x)) = j^\nu(x) \tag{4.56}$$

である．ベクトルポテンシャルにはゲージ変換に対応する不定性がある．その不定性を条件を課して消すことをよくやる．これを「ゲージ固定 (gauge fixing)」という．ゲージ固定条件として $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ を選んだとしよう．そうすると真空中でのマクスウェルの方程式は，そこでは電荷も電流もないので

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu(x) = \left\{ \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \boldsymbol{\nabla}^2 \right\} A^\nu(x) = 0. \tag{4.57}$$

この古典的な方程式の解は

$$A^\nu(x) = \sum_{\boldsymbol{p}} \left(a^\nu(\boldsymbol{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} + a^\nu(\boldsymbol{p})^\dagger e^{+\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} \right) \tag{4.58}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{k}} \left(a^\nu(\boldsymbol{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + a^\nu(\boldsymbol{k})^\dagger e^{+ik_\mu x^\mu} \right). \tag{4.59}$$

これが (4.57) を満たすためには，

$$p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c} \right)^2 - (\boldsymbol{p})^2 = 0. \tag{4.60}$$

但し，4 次元の運動量 p^μ は $p^0 = p_0 = E/c$，$p^{\{1\sim3\}} = -p_{\{1\sim3\}} = p_{x,y,z}$ であり，4 次元の波数ベクトル k^μ は $k^0 = k_0 = \omega/c$，$k^{\{1\sim3\}} = -k_{\{1\sim3\}} = k_{x,y,z}$ である．相対性理論が一般的な原理であるならば，波の位相 $\Phi = (p_\mu x^\mu)/\hbar = k_\mu x^\mu$ はローレンツ変換で不変でなければならない．何故ならば波が干渉するかどうかは波の位相で決まるので，これは座標系の取り方に依存してはいけないからである．このことから波の位相と $\Phi = S/\hbar$ という比例関係にある作用 S も相対論的不変量，即ちローレンツ変換不変量となる．更に一般座標変換不変量でもある．この条件から重力場の作用を与えることができる．ここで p_μ が共変ベクトルであることが分かったので，p^μ は反変ベクトルである．これからエネルギーと運動量に対するローレンツ変換が得られる．つまり $(E/c, \boldsymbol{p})$ は $(ct, \boldsymbol{x})$ と全く同じ変換をする．即ち上記で考えた O 座標系から O' 座標系に変換する場合には

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & -\frac{V/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \\ -\frac{V/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p^1 \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

となる．

一般的に相対論的不変量の値は粒子に固有の定数である．これを粒子に固有

のパラメータ m を用いて次のように表す．

$$c^2(p_\mu p^\mu) = (\hbar c)^2(k_\mu k^\mu) = E^2 - (\boldsymbol{p}c)^2 \equiv (mc^2)^2. \tag{4.62}$$

この m を「質量（mass）」と呼ぶ．何故ならば，(4.62) の 2 次方程式を解くと

$$E = \pm\sqrt{(\boldsymbol{p}c)^2 + (mc^2)^2} \tag{4.63}$$

であるが，$|\boldsymbol{p}| \ll mc$ の場合には近似的に

$$E = \pm\left(mc^2 + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \cdots\right) \tag{4.64}$$

となる．「$\pm$」の解の内「$+$」の方は通常の粒子を表す．静止しているとき $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ でも，エネルギー mc^2 を持つ．これを静止エネルギーという．相対論によれば粒子は質量に比例するエネルギーを持つことになる．c は圧倒的に大きな速度なので，静止エネルギーは莫大なエネルギーである．1 g の物質の静止エネルギーは 10^{14} J であり，約 2×10^5 トンの摂氏 0 度にある水を沸騰させる能力を持つ．次の項 $\boldsymbol{p}^2/(2m)$ はよく知られた，質量 m の粒子の持つ運動エネルギーである．そんな訳で m を粒子の質量と呼ぶのである．

一方「$-$」の解はエネルギーが負なので通常の粒子を表さない．負のエネルギーを持つ粒子は時間の負の向きに運動すると考える．運動量の向きは速度の向きである．時間の流れを逆転させると，速度の向きも逆になるので，運動量も符号を変える．このように解釈した負のエネルギーを持つ「粒子（particle）」の波動関数 $\psi(t, \boldsymbol{x})$ は，新しく導入する正のエネルギーを持つ「反粒子（anti-particle）」の波動関数の複素共役（complex conjugate, hermitian conjugate）」と見なすことができる．即ち

$$\psi_{\text{particle}}(t, \boldsymbol{x}; -|E|, \boldsymbol{p}) = \psi_{\text{anti-particle}}(t, \boldsymbol{x}; |E|, -\boldsymbol{p})^\dagger, \quad \text{where} \tag{4.65}$$

$$\psi_{\text{particle}}(t, \boldsymbol{x}; -|E|, \boldsymbol{p}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(-|E|t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}, \quad \text{and} \tag{4.66}$$

$$\psi_{\text{anti-particle}}(t, \boldsymbol{x}; |E|, -\boldsymbol{p}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(|E|t - (-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x})} \tag{4.67}$$

となるからである．粒子が電荷 Q を持っている時のゲージ変換を粒子と反粒子の波動関数で比較すると

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{\frac{iQ}{\hbar c}\theta(x)}\psi(x), \tag{4.68}$$

$$\psi(x)^\dagger \to \psi'(x)^\dagger = e^{\frac{-iQ}{\hbar c}\theta(x)}\psi(x)^\dagger \tag{4.69}$$

である．従って，粒子の電荷が Q ならば，反粒子の電荷は $-Q$ となる．

まとめると反粒子の波動関数は粒子の波動関数の複素共役であり，粒子が負のエネルギーを持って時間の負の方向に進む状態を，波動関数の複素共役を取ることによって，正のエネルギーを持つ反粒子が時間の正の向きに運動すると見なすことができる．このとき反粒子の運動量と電荷は粒子と比べて符号が逆

になる．

電磁場にもどると，その波動関数から粒子に関するデータを読み取ると，この波で記述される粒子の質量は $p_\mu p^\mu = 0$ なので $m = 0$ である．このとき「マスレス（massless）」という．また電荷を持たないので $Q = 0$ である．この粒子を「光子（photon）」という．光子の場合は反粒子は自分自身なので，粒子と反粒子の区別はない．

真空中の電磁波の解 (4.59) に戻って少し補足する．より正確にはこのときの $p^0 = \hbar k^0 = |E| = \sqrt{(c\boldsymbol{p})^2 + (mc^2)^2}$ と取るべきである．つまり右辺の第 1 項は様々な波数ベクトルを持つ通常の粒子の波動関数を重み $a^\nu(\boldsymbol{k})$ を付けて重ね合わせたものであり，第 2 項は様々な波数ベクトルを持つ反粒子の波動関数に重み $a^\nu(\boldsymbol{k})^\dagger$ を付けて重ね合わせたものである．電磁場の波動関数は実数であるから，$A^\nu(x)^\dagger = A^\nu(x)$ を満たさないといけない．そのために粒子と反粒子の波動関数に付く重みは互いに複素共役の関係になっている．

もう 1 つ，ゲージ条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ を考慮しなければならない．真空中の電磁波を考える場合には，このゲージ条件を $A^0(x) = \phi^0(x) = 0$ および $\boldsymbol{\nabla A} = 0$，とより強い条件とすることができる．何故ならばこの条件の下で電荷に関するガウスの法則が成り立つからである．即ち電磁波とは，電荷があればその周りに放射状に発散する電場が発生するというガウスの法則に由来する現象ではない．電荷も電流もない真空中において，電場が時間的に変化することによりマクスウェルの変位電流が発生し，その周りにアンペールの法則により（発散のない回転）磁場が生じる．次にこの磁場が時間的に変化することによってファラディーの電磁誘導の法則によって（発散のない回転）電場が生じる．このくり返しによって，電場と磁場の振動が空間を伝搬するという現象である．従って，電磁波の方程式は $\partial_\mu \partial^\mu \boldsymbol{A}(x) = 0$ で充分である．ここで $\boldsymbol{\nabla A} = 0$ を課すと，$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}) = 0$ となる．波数ベクトルとベクトルポテンシャルの振動方向が直交するという条件である．波数ベクトルの向きは波が伝搬する向きであり，波数 $\boldsymbol{k}$ の波に対して電場と磁場を計算すると，電場は $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}) \propto (\omega/c)\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})$ であり，磁場は $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k}) \propto \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})$ である．従って，振動する電場と磁場はお互いに直交しながら，電場と磁場のいずれにも直交する方向に伝搬することが理解できるだろう．

このように波の進行方向に垂直な方向に物理量（今の場合には電場と磁場）が振動する波を「横波（transeverse wave）」という．これに対して音波（acoustic wave）」は「縦波（longitudinal wave）」である．空気の密度変化を解消するために音波が生じるが，そのためには密度が変化する方向に波が伝搬しなければならないからである．

最後に電磁場の作用を相対論的に書き直しておこう．先ず作用の定義は

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x \left(\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{A}}(t, \boldsymbol{x}) \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}) \right.$$

$$- \mathcal{H}_{EM2}\left(\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{A}}(t,\boldsymbol{x}), \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}), \phi(t,\boldsymbol{x})\right)\Big) \tag{4.70}$$

であった．$\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{A}} = -\boldsymbol{E}/c$ であることと，ϕ には対応する運動量 π_ϕ は存在しないことも思い出しておこう．我々は経路積分として，座標と運動量の両方で積分するという方法を取っていた．従って，経路積分において $\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{A}}$ で積分を実行すれば，通常の座標変数のみで記述された経路積分になる．このときの波の位相を $\hbar$ で割ってそれを改めて作用 S' としよう．それをするためには次の積分を実行しなければならない．

$$\int \mathcal{D}\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{A}}(t,\boldsymbol{x}) e^{\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{c^2}{2}\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{A}}(t,\boldsymbol{x})^2 - c\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{A}}(t,\boldsymbol{x})\cdot\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)(t,\boldsymbol{x})\right)}. \tag{4.71}$$

この積分の仕方を説明しよう．それは本質的に以下のガウス積分に過ぎない．ガウス積分とは

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \text{for } a > 0 \tag{4.72}$$

のことである．物理学の基本法則を導出する際に現れる積分はガウス積分以外にはないといっても過言ではないだろう．具体的な問題を解く時には複雑な積分を実行しなければならないことはいうまでもないが，基本法則を導く際にはガウス積分以外の複雑な積分を実行することは少ないのではないだろうか．従ってとても重要な積分公式なのでここで改めて導出しておこう．右辺に $\sqrt{\cdots}$ があるので，両辺を二乗して積分すると

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy\ e^{-a(x^2+y^2)} = \int_0^{\infty} rdr \int_0^{2\pi} d\theta\ e^{-ar^2} = \frac{\pi}{a} \tag{4.73}$$

となる．また次のような積分も積分変数をずらすと実行できる．

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\frac{1}{2}xax + jx} \tag{4.74}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{a}j)a(x-\frac{1}{a}j) + \frac{1}{2}j\frac{1}{a}j} \tag{4.75}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{1}{2}j\frac{1}{a}j}. \tag{4.76}$$

物理ではこの係数 a が複素数であってもそれほど気にせずにガウス積分を実行する．というのは次のことができると考えているからである．少し説明をすると，経路積分とは次のような積分である．

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}x(t)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left(\frac{1}{2}x(t)\hat{A}(t)x(t) - j(t)x(t)\right)}. \tag{4.77}$$

ここでの係数 A は微分演算子であるかもしれないので $\hat{A}$ とした．さて，指数関数の肩にある $-i$ を取り去ろう．そのために $t = i\tau$ で定義されるパラメータ τ を導入する．そうすると

$$I_2(j) = \int_{i\infty}^{-i\infty} \mathcal{D}x(\tau)\ e^{-\frac{1}{\hbar}\int_{i\infty}^{-i\infty} d\tau\left(\frac{1}{2}x(\tau)\hat{A}(\tau)x(\tau)-j(\tau)x(\tau)\right)}. \tag{4.78}$$

ここで，積分路を 90 度回転し，τ を実数として $(-\infty, +\infty)$ の区間で積分することにする．

$$I_3[j] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}x(\tau)\ e^{-\frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\left(\frac{1}{2}x(\tau)\hat{A}(\tau)x(\tau)-j(\tau)x(\tau)\right)}. \tag{4.79}$$

このとき t の積分路も $(-\infty, \infty)$ から $(-i\infty, i\infty)$ へ 90 度回転する．これを「ウィック回転（Wick rotation）」という．積分路を 90 度回転させる変更が許されるのは，その積分路を回転させる途中で，積分路が被積分関数の特異点を横切らないことが条件となる．これは「解析接続（analytic continuation）」の問題である．大抵の場合それが正当化されると信じて，積分を実行する．このようにウィック回転した形式の方がより正確だと思うならば，最初からそうしてもよい．その場合には，被積分関数が波動関数の位相を表さなくなるところが不満足であるが，形式的には統計力学により似ることになる．この場合 $x_\mu x^\mu = ct^2 - \boldsymbol{x}^2 = -(c\tau^2 + \boldsymbol{x}^2)$ となり，時空は 4 次元のユークリッド空間となる，従って最初からウィック回転をしたものから出発する形式を「ユークリッド場の理論（Euclidean quantum field theory）」という．

さて I_3 は

$$\begin{aligned} I_3[j] &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}x(\tau)\ e^{-\frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\left(\frac{1}{2}x(\tau)\hat{A}(\tau)x(\tau)\right)}\right) \\ &\quad \times\ e^{\frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\left(\frac{1}{2}j(\tau)\hat{A}^{-1}(\tau)j(\tau)\right)} \\ &= I_3[j=0] \times e^{\frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\left(\frac{1}{2}j(\tau)\hat{A}^{-1}(\tau)j(\tau)\right)} \end{aligned} \tag{4.80}$$

となる．重要な部分は 2 番目の因子であるが，$I_3[j=0]$ も重要な場合があるので，ガウス積分を用いて実行してみよう．前にもしたように，時間を ϵ 間隔で $\{t_n\}$ $(n = -\infty, \ldots, \infty)$ と分割して最後に $\epsilon \to 0$ とする．

$$\begin{aligned} I_3[j=0] &= \lim_{\epsilon\to 0} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\right)\ e^{-\frac{1}{\hbar}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon\left(\frac{1}{2}x_n\hat{A}_{nn}x_n\right)} \\ &= \prod_{n=-\infty}^{\infty} (\hat{A}_{nn})^{-1/2} = (\det \hat{A})^{-1/2}. \end{aligned} \tag{4.81}$$

最後にウィック回転を逆に取って元に戻すと

$$\begin{aligned} I_1(j) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}x(t)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left(\frac{1}{2}x(t)\hat{A}(t)x(t)-j(t)x(t)\right)} \\ &= (\det \hat{A})^{-1/2} e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left(\frac{1}{2}j(t)\hat{A}^{-1}(t)j(t)\right)} \end{aligned} \tag{4.82}$$

という「経路積分公式」が得られる．場の理論の場合にはこの公式は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\phi(x)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{1}{2}\phi(x)\hat{A}(x)\phi(x)-j(x)\phi(x)\right)}$$

$$= (\det \hat{A})^{-1/2} e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{1}{2}j(x)\hat{A}^{-1}(x)j(x)\right)} \tag{4.83}$$

となる．上記の「経路積分公式」はとても重要であるのでいつでも使えるようにしておきたい．経路積分を実行するということは古典的軌道からのずれを取り入れることなので，量子補正（揺らぎ）あるいは熱揺らぎを取り込む計算方法である．

随分長く経路積分のやり方を説明してしまった．元へ戻って上記の (4.83) を適用すると

$$\int \mathcal{D}\boldsymbol{\pi_A}(t,\boldsymbol{x}) e^{\frac{i}{\hbar}\int dtd^3x\ \left(-\frac{c^2}{2}\boldsymbol{\pi_A}(t,\boldsymbol{x})^2 - c\boldsymbol{\pi_A}(t,\boldsymbol{x})\cdot\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)(t,\boldsymbol{x})\right)} \tag{4.84}$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar}\int dtd^3x\ \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2(t,\boldsymbol{x})\right)} \tag{4.85}$$

となる．従って，$\boldsymbol{\pi_A}$ で積分したのちの分配関数は，

$$Z = \int \mathcal{D}\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}) e^{\frac{i}{\hbar}\int dtd^3x\ \left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2)(t,\boldsymbol{x}) - (\rho\phi - \frac{1}{c}\boldsymbol{jA})(t,\boldsymbol{x})\right)} \tag{4.86}$$

$$\equiv \int \mathcal{D}\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}) e^{\frac{i}{\hbar}\int dtd^3x \mathcal{L}} \tag{4.87}$$

としてラグランジュ密度 $\mathcal{L}$ を導入すると

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2)(t,\boldsymbol{x}) - \left(\rho\phi - \frac{1}{c}\boldsymbol{jA}\right)(t,\boldsymbol{x}) \tag{4.88}$$

$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - j_\mu(x)A^\mu(x) \tag{4.89}$$

となる．これが電磁場のラグランジュ密度である．またラグランジュ密度は相対論的不変量となる．なぜならば相対論的不変な波の位相 Φ とラグランジュ密度は

$$\Phi = \frac{1}{\hbar}S = \frac{1}{\hbar}\int dtd^3x\ \mathcal{L}(x) = \frac{1}{\hbar c}\int d^4x\ \mathcal{L}(x) \tag{4.90}$$

の関係にある．ここで 4 次元の体積要素が相対論的に不変であるから $\mathcal{L}$ が相対論的に不変となる．実際ローレンツ変換を行うと変数変換のヤコビアンは $\det \overline{A} = \cosh(\alpha)^2 - \sinh(\alpha)^2 = 1$ であるので，4 次元の体積素片は相対論的不変量である．

以上から相対性理論ではラグランジュ密度を相対論的に不変として，座標のみで積分する従来型の経路積分を使用する方が容易である．しかしながら我々のように座標およびその運動量で積分する形の経路積分の方が物理的意味を理解するのに適している．ゲージ理論の経路積分では $A^0(x)$ に関する積分を含めて出発するけれど，この積分がガウス法則拘束条件を出すことが分かる．そのためには指数関数の肩が x の 1 次式である積分を調べておこう．

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi}\ e^{iax}. \tag{4.91}$$

無限遠の振る舞いを確定するためにこの積分を

$$I_4 = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi}\ e^{\left(iax - \frac{1}{2}\epsilon x^2\right)} \tag{4.92}$$

とする．これは上で練習しているので直ぐに積分ができて

$$I_4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\left(\frac{a^2}{2\epsilon}\right)}. \tag{4.93}$$

この関数は $\delta(a)$ である．なぜならば，この関数は $a \neq 0$ では $\epsilon \to 0$ の極限でゼロとなり，$a = 0$ では無限大となるのでデルタ関数の性質を持つ．積分すると 1 になることを確認すればよい．これはガウス積分を用いると直ぐに確かめることができる．従って

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi}\ e^{ixy} = \delta(x). \tag{4.94}$$

同様にして

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3y}{(2\pi)^3}\ e^{i\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}} = \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}), \tag{4.95}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4y}{(2\pi)^4}\ e^{ix_\mu y^\mu} = \delta^{(4)}(x) \tag{4.96}$$

などが得られる．経路積分に使用する場合には

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\phi(x)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ c(x)\phi(x)} = \prod_x \delta(c(x)) \tag{4.97}$$

である．拘束条件 $c(x) = 0$ はこのようにして出る．ガウス法則拘束条件も作用において $A_0(x)$ の係数となるので，同じように導出される．

4.2 スピン 0 の粒子の波動方程式

これまで電磁気を中心に話を進めてきた，電磁波で記述される粒子はフォトンであり，その粒子のスピンは 1 である．電磁場を記述するベクトルポテンシャルはベクトルであり，ベクトルの変換をする場をスピン 1 の場という．ベクトルポテンシャルは次の変換則に従う．

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x') = a^\mu{}_\nu A^\nu(x), \text{ where} \tag{4.98}$$

$$x^\mu \to x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu. \tag{4.99}$$

変換をローレンツ変換としたが，(μ, ν) を空間座標の (i, j) に制限した場合にも変換不変性が成り立つ．そのときの係数 $a^i{}_j$ もローレンツ変換となるための条件 (4.24) を満たす．添字が空間成分の場合には，$a_i{}^j = a^i{}_j$ である．このとき (4.24) は

$$(a^{-1})^i{}_j = a^j{}_i, \tag{4.100}$$

即ち $O=(a^i{}_j)$ は $OO^T=O^TO=I$ を満たす 3 行 3 列の「直交行列（orthogonal matrix)」O(3) である．これには 3 次元空間の通常の回転と，回転したのちに 3 つの座標の符号を逆転させる $\boldsymbol{x}\to-\boldsymbol{x}$ 変換とが含まれる．前者に限定したいので，行列式を +1 に制限しよう．これを「特殊直交行列（special orthogonal matrix)」といって SO(3) と書く．この変換を続けて行うことを群の演算とするとこの行列全体が群になっていることは，直ぐに理解できる．何故ならば直交行列 2 つを掛けるとその積も直交行列であり，逆行列も直交行列であるからである．これを「SO(3) 群」(SO(3) group)」という．3 次元空間における回転操作の全体は SO(3) 群をなす．この空間回転に対する変換規則がスピンと関係する．この節では，スピン 0 の粒子を波として記述して見よう．

先ず簡単に「スピン（spin)」の概略を述べる．詳しいことは次節で説明する．スピンとは粒子が持つエネルギーや運動量や電荷とは異なる，粒子に固有の性質である．スピンはその大きさを表す s と，向きを表す s_z の 2 つの数で指定される．スピンの大きさ s が整数 $\{0,1,2,\ldots\}$ である粒子を「ボース粒子（boson)」，半整数 $\{1/2,3/2,\ldots\}$ である粒子を「フェルミ粒子（fermion)」という．スピンの向きは，変数 s_z が $\{-s,-s+1,\cdots,s-1,s\}$ の値を取り得るので，スピンの向きは $2s+1$ 種類ある．これは具体的に調べると理解できる．

さて $s=0$ の粒子であるが，これはスピンの向きは 1 種類しかない．従って 1 種類の波で粒子を表すことになる．その波を $\phi(x)$ としよう．このようにスピンゼロを表す場をスカラー（scalar）場という．

スカラー場 $\phi(x)$ の運動量密度を $\pi_\phi(x)$ とすると，ハミルトニアン密度は

$$H(s=0)=\int d^3x\left(\frac{1}{2}(v_s)^2\pi_\phi(x)^2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\phi(x))^2+V(\phi(x))\right) \quad (4.101)$$

と書ける．v_s は波の速さで，典型的な例として音速（sound velocity)」とする．ポテンシャルとしてよく現れる形は

$$V(\phi(x))=y\left(\psi(x)^\dagger\psi(x)\right)\phi(x)+A\phi(x)^2+B\phi(x)^4 \quad (4.102)$$

である．第 1 項は電子等スピン 1/2 の場 $\psi(x)$ の絶対値の二乗 $|\psi(x)|^2$ がスカラー場 $\phi(x)$ と相互作用する項で，「湯川相互作用 (Yukawa interaction)」と呼ばれ，相互作用の強さを y で表す．湯川の中間子論で現れたスピン 1/2 の核子とスピン 0 の中間子の相互作用を表す項だからである．第 2 項 $A\phi(x)^2+B\phi(x)^4$ はランダウが導入したオーダーパラメータによる項である．古典的な運動方程式を求めると

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t}(x) &= \frac{\delta H(s=0)}{\delta\pi_\phi(x)}=(v_s)^2\pi_\phi(x), \quad (4.103)\\ \frac{\partial\pi_\phi}{\partial t}(x) &= -\frac{\delta H(s=0)}{\delta\phi(x)}\end{aligned}$$

$$= \nabla^2\phi(x) - y\left(\psi(x)^\dagger\psi(x)\right) - 2A\phi(x) - 4B\phi(x)^3 \tag{4.104}$$

から

$$\left(\frac{1}{(v_s)^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(x) - \nabla^2\right)\phi(x) = -y\left(\psi(x)^\dagger\psi(x)\right) - 2A\phi(x) - 4B\phi(x)^3 \tag{4.105}$$

が得られる．相互作用を無視すると，

$$\left(\frac{1}{(v_s)^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(x) - \nabla^2\right)\phi(x) = 0 \tag{4.106}$$

となる．

「音波（acoustic wave）」がこの方程式を満たすことを確かめよう．空気を例に取って x 方向に疎密が生じたとしよう．疎密は x にある空気の分子が時刻 t に $x + X(t,x)$ に少し移動すれば起きる．微小な長さ dx は $dx(1 + \frac{\partial X}{\partial x}(t,x))$ だけ x 方向に延びるので，密度はその逆数だけ減少する．つまり密度は元の ρ_0 から $\rho_0(1 - \frac{\partial X}{\partial x}(t,x))$ と減少する．今 x と $x + \Delta x$ の間にある薄い板状の空気の塊を考える．yz 方向には面積 S で広がっているとする．この塊に働く力は圧力 p を用いると $(-p(x+\Delta x) + p(x))\,S$ となる．ところで圧力は空気の状態方程式から決まる密度の関数である．即ち $p = p(\rho(t,x))$．従って運動方程式は

$$\begin{aligned}(\rho_0\Delta x S)\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= (-p(x+\Delta x) + p(x))\,S \\ &= \{-p(\rho(x+\Delta x)) + p(\rho(x))\}\,S \\ &= (\rho_0\Delta x S)\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2},\end{aligned} \tag{4.107}$$

$$\text{namely}\qquad \frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \tag{4.108}$$

が示された．但し音速は $v_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$ である．空気の振動は急速な振動なので熱が出入りする余裕がない．つまり空気の振動は断熱過程である．従ってエントロピー S を一定として微分とすることになるので，微分に添字 S を加えた．v_s を空気の状態方程式を用いて概算してみることを勧める．常温で 350 m/s 程度の値が出せればよい．

3 次元に拡張すると

$$\left(\frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x}) = 0 \tag{4.109}$$

となる．疎密波による体積の変化のみに注目すると体積の変化は

$$d^3x \to d^3x\,(1 + \nabla\boldsymbol{X}) \tag{4.110}$$

なので，スカラー場 $\phi(t,\boldsymbol{x})$ を，体積の変化率を表す場として下記のように導

入するとよいだろう．

$$\phi(x) \equiv (\text{const}) \times \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{x}). \tag{4.111}$$

これがスカラー場の方程式 (4.106) を満たすことが分かる．従ってスカラー場は体積変化を表す場と考えることができる．金属では，金属イオンが規則正しく並んで「格子 (lattice)」を形成し，そこを自由電子 (free electron)」が流れている．この格子が伸び縮みをすると，金属イオンの密度が変化する．この変化が波として伝わる．これを格子振動 (lattice vibration)」という．この振動における格子の体積変化は上記のスカラー場 $\phi(x)$ で記述できるだろう*1)．格子振動の波を表す粒子を「フォノン (phonon)」という．つまりスカラー場の理論はフォノンを記述する理論である．もちろんこの理論は相対論的に不変でない．

相対論的に不変なスカラー場の理論にするためには，$v_s = c$ とすればよいことは直ぐに分かるだろう．ポテンシャルの ϕ^2 の項も加えると，

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right\} \phi(t, \boldsymbol{x}) = \left\{ \partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right\} \phi(x) = 0 \tag{4.112}$$

となる．この方程式を「クライン–ゴルドン方程式 (Klein-Gordon equation)」という．スカラー場の理論では，非相対論的 ($v_s \ll c$) か相対論的 ($v_s \approx c$) かで，方程式の形は変わらない．波の伝搬速度が異なるだけである．従って，運動方程式の解はいずれの場合も次式で与えられる．

$$\phi(x) = \sum_{\boldsymbol{p}} \left(\varphi(\boldsymbol{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} + \varphi(\boldsymbol{p})^\dagger e^{+\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} \right) \tag{4.113}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\varphi(\boldsymbol{k}) e^{-i k_\mu x^\mu} + \varphi(\boldsymbol{k})^\dagger e^{+i k_\mu x^\mu} \right). \tag{4.114}$$

但し，この場合 $p_0 = \hbar\omega > 0$ と取って，

$$(p_0)^2 - \left(\frac{v_s}{c} \right)^2 \boldsymbol{p}^2 = 0, \quad \text{or} \quad E^2 - (v_s)^2 \boldsymbol{p}^2 = 0, \tag{4.115}$$

$$(k_0)^2 - \left(\frac{v_s}{c} \right)^2 \boldsymbol{k}^2 = 0, \quad \text{or} \quad \omega^2 - (v_s)^2 \boldsymbol{k}^2 = 0 \tag{4.116}$$

である．但しポテンシャルの項は入れていない．クライン–ゴルドン方程式でポテンシャルの質量項を加えた場合には，

$$(p_0)^2 - \boldsymbol{p}^2 = p_\mu p^\mu = (mc)^2, \tag{4.117}$$

$$(k_0)^2 - \boldsymbol{k}^2 = k_\mu k^\mu = (mc/\hbar)^2 \tag{4.118}$$

となる．

---

*1) もちろん格子振動には格子の形を変化させるモードもある．

スカラー場の理論のラグランジュ密度も書いておこう．

$$\mathcal{L}(s=0)=\frac{1}{2v_s^2}\left(\frac{\partial\phi(x)}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\phi(x)\right)^2-V(\phi(x)) \tag{4.119}$$

である．相対論的な場合には

$$\mathcal{L}(s=0)=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x)-V(\phi(x)) \tag{4.120}$$

となる．

4.3 スピンとその表現

スピンについて少し踏み込んで説明しよう．先ず電磁場がスピン 1 の場の理論であることを理解する．電磁場はベクトルポテンシャルで記述できるので，これを縦に並べて 3 成分の波動関数とし，これを $\boldsymbol{A}(x)$ としよう．別途 3 次元座標を縦に並べたベクトル $\boldsymbol{x}$ を準備する．

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{pmatrix}A^1(x)\\A^2(x)\\A^3(x)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}. \tag{4.121}$$

次に天下り的に 3 つの 3 行 3 列行列 $\hat{\boldsymbol{L}}$ を導入し，これを仮に「角運動量演算子（angular momentum operator)」と呼ぼう．定義は

$$\hat{L}^1\equiv -i\hbar\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \hat{L}^2\equiv -i\hbar\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},$$
$$\hat{L}^3\equiv -i\hbar\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{4.122}$$

である．角運動量演算子を $\boldsymbol{x}$ に作用させると

$$\hat{L}^1\boldsymbol{x}=-i\hbar\begin{pmatrix}0\\-x^3\\x^2\end{pmatrix},\quad \hat{L}^2\boldsymbol{x}=-i\hbar\begin{pmatrix}x^3\\0\\-x^1\end{pmatrix},$$
$$\hat{L}^3\boldsymbol{x}=-i\hbar\begin{pmatrix}-x^2\\x^1\\0\end{pmatrix} \tag{4.123}$$

となる．つまり $\hat{L}^1$ は x^1 を 0 に置き換え，x^2 を $-i\hbar(-x^3)$ に置き換え，x^3 を $-i\hbar(x^2)$ に置き換える働きを持つ．これは演算子 $-i\hbar(x^2\partial_3-x^3\partial_2)$ を (x^1,x^2,x^3) を変数とする関数に作用させたときと同じ働きである．従って，

$$\hat{L}^i=-i\hbar\epsilon_{ijk}x^j\partial_k,\quad \text{namely } \hat{\boldsymbol{L}}=\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{p}}. \tag{4.124}$$

$\hat{\boldsymbol{L}}$ は，古典力学の「角運動量（angular momentum）」$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$ を量子力学の演算子に置き換えたものなので，「角運動量演算子（angular momentum operator）」と仮に呼んだけれど正しかった．

ここで次の行列を計算しよう．少し頑張ると，

$$\hat{R}(\theta_3) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\hat{L}_3\theta_3} = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.125}$$

となることが分かる．指数関数を展開し，偶数べきをまとめると $\cos\theta_3$ となり，奇数べきをまとめると $\sin\theta_3$ になるからである．展開の第 1 項に I があることに注意しよう．指数関数の展開公式は

$$e^A = 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots \tag{4.126}$$

である．このことから $\hat{R}(\theta_3)$ は，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $z = x^3$ 軸周りに角度 θ_3 だけ回転する演算であることが分かる．これは SO(3) の元である．同様にして，$\hat{R}(\theta_1) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{L}_1\theta_1}$ は $z = x^1$ 軸周りに角度 θ_1 の回転をさせ，$\hat{R}(\theta_2) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{L}_2\theta_2}$ は $z = x^2$ 軸周りに角度 θ_2 の回転をさせる演算子となる．このようにして波動関数に $\hat{R}(\theta_1)$，$\hat{R}(\theta_2)$，$\hat{R}(\theta_3)$ などを $\boldsymbol{x}$ の左から，順番に掛けると $\boldsymbol{x}$ を回転することができる．3 次元空間における回転操作は SO(3) 群を作ることは上で説明した．第 1 章で説明した正方形群や長方形群は，2 次元面内の 90 度回転あるいは特定の直線に対する鏡映操作であった．従って群の要素の数は有限であった．しかしながら今考察している回転操作は，回転角として 3 つのパラメータ $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ が取れる．しかもそれぞれ連続のパラメータである．このような連続のパラメータを有する群を「連続群（continuous group）」あるいは「リー群（Lie group）」という．連続パラメータを有する群を研究したソフス・リー（Sophus Lie）の名前を冠してこのように呼ばれている．

一般的な回転群の要素を与えるときには

$$R(\boldsymbol{\theta})_{s=1} = e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\boldsymbol{\theta})} \in \mathrm{SO}(3) \tag{4.127}$$

とするのが通常である．$\hat{\boldsymbol{L}}$ が分かると回転を作り出すことができる．従って $\frac{1}{\hbar}\hat{\boldsymbol{L}}$ を回転群あるいは SO(3) 群の「生成演算子（generator）」という．SO(3) の生成演算子は 3 つある．この 3 つの生成演算子が

$$\left[\left(\frac{1}{\hbar}\hat{L}_i\right), \left(\frac{1}{\hbar}\hat{L}_j\right)\right] = i\sum_k \epsilon_{ijk}\left(\frac{1}{\hbar}\hat{L}_k\right) \tag{4.128}$$

という関係式を満たすことが分かる．これは行列の定義を用いてもよいし，$\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ を用いて計算してもよいだろう．この (4.128) を「群の交換関係（commutation relation of the group）」といって，回転群を特徴付ける基本的な関係式である．

さてここで $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ を計算すると

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 = 2\hbar^2 \hat{I} = \hbar^2 s(s+1)\hat{I} \tag{4.129}$$

となる．ここで $\hat{I}$ は単位行列である．係数が 3 でなく，2 であることを確認することは重要である．従って $s=1$ となる．$s(s+1)$ の形は一般論から出るがここでは具体例で理解することとする．$\hat{L}_3$ を波動関数に作用させてスピンの 3 つの状態 $s_z=(1,0,-1)$ を理解するために成分を組み替える．即ち $\boldsymbol{x}^\sharp$ と $\boldsymbol{A}^\sharp(x)$ を

$$x^\sharp(+1) = \frac{(x^1 - ix^2)}{\sqrt{2}}, \quad x^\sharp(0) = x^3, \quad x^\sharp(-1) = \frac{(x^1 + ix^2)}{\sqrt{2}},$$
$$A^\sharp(+1) = \frac{A^1(x) - iA^2(x)}{\sqrt{2}}, \quad A^\sharp(0) = A^3(x), \quad A^\sharp(-1) = \frac{A^1(x) + iA^2(x)}{\sqrt{2}}$$

とする．そうすると

$$\hat{L}_3\left(X^\sharp(+1), X^\sharp(0), X^\sharp(-1)\right) = \hbar\left(+X^\sharp(+1), 0, -X^\sharp(-1)\right), \tag{4.130}$$
$$\hat{L}_3\left(A^\sharp(+1), A^\sharp(0), A^\sharp(-1)\right) = \left(+A^\sharp(+1), 0, -A^\sharp(-1)\right) \tag{4.131}$$

となる．この $\hat{L}_3$ の固有値を $\hbar s_z$ としてスピンの z 成分を決める．次に角運動量の「上昇演算子 (raising operator)」$\hat{L}_+$ と「下降演算子 (lowering operator)」$\hat{L}_-$ を次のように定義しよう．

$$\hat{L}_+/\hbar = \frac{1}{2\hbar}(L_1 - iL_2), \quad \hat{L}_-/\hbar = \frac{1}{2\hbar}(L_1 - iL_2). \tag{4.132}$$

これがスピンの z 成分を 1 上昇させたり，1 下降させたりすることは確認できる．

$$\hat{L}_+/\hbar\left(x^\sharp(+1), x^\sharp(0), x^\sharp(-1)\right) = \left(0, x^\sharp(+), x^\sharp(0)\right), \tag{4.133}$$
$$\hat{L}_+/\hbar\left(A^\sharp(+1), A^\sharp(0), A^\sharp(-1)\right) = \left(0, A^\sharp(+), A^\sharp(0)\right), \tag{4.134}$$
$$\hat{L}_-/\hbar\left(x^\sharp(+1), x^\sharp(0), x^\sharp(-1)\right) = \left(x^\sharp(0), x^\sharp(-), 0\right), \tag{4.135}$$
$$\hat{L}_-/\hbar\left(A^\sharp(+1), A^\sharp(0), A^\sharp(-1)\right) = \left(A^\sharp(0), A^\sharp(-), 0\right). \tag{4.136}$$

このように SO(3) 群の演算を行列で表すことが「表現 (representaion)」である．ここでは 3 成分の波動関数に対する 3 行 3 列の行列として表現されているので，「3 次元表現」という．表現の次数はスピンの多重度 $2s+1=3$ である．

次に上記をもとに 3 次元回転群に対するスピン 1/2 の表現を求めよう．$s=1/2$ の場合に 2 つの状態 $s_z=1/2$ と $s_z=-1/2$ が存在する．前者を z 軸の向きにスピンアップ (spin up, ↑)，後者をスピンダウン (spin down, ↓) と呼ぼう．スピンアップとスピンダウンで波動関数が 2 つ必要なことはいうまでもない．2 次元表現であり，群の要素は 2 行 2 列の行列で表現される．2 成分の波動関数を

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_{s_z=1/2}(x) \\ \psi_{s_z=-1/2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(x) \\ \psi_\downarrow(x) \end{pmatrix} \tag{4.137}$$

とする．ここで生成演算子となる「パウリ行列（Pauli matrices）」$\boldsymbol{\sigma}$ を導入しよう．即ち $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.138}$$

を導入し，スピン演算子 $\hat{\boldsymbol{s}}$ を以下のように定義する．即ち

$$\hat{\boldsymbol{s}} \equiv \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma} = \frac{\hbar}{2}(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3). \tag{4.139}$$

波動関数に対するスピン演算子の作用を書き下すと

$$\begin{aligned} &\hat{s}_x \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \psi_\downarrow \\ \psi_\uparrow \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_y \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -i\psi_\downarrow \\ i\psi_\uparrow \end{pmatrix}, \\ &\hat{s}_z \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ -\psi_\downarrow \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.140}$$

スピン 1 の場合と同じように回転の演算を行列で表現することができる．即ち，

$$\begin{aligned} \hat{R}(\theta_3) &\equiv e^{\frac{i}{\hbar}\hat{s}_3\theta_3} \\ &= e^{i\frac{\sigma_3}{2}\theta_3} = I\cos\frac{\theta_3}{2} + i\sigma_3\sin\frac{\theta_3}{2} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta_3}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta_3}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.141}$$

同様にして，

$$\begin{aligned} \hat{R}(\theta_1) &\equiv e^{\frac{i}{\hbar}\hat{s}_1\theta_1} \\ &= e^{i\frac{\sigma_1}{2}\theta_1} = I\cos\frac{\theta_1}{2} + i\sigma_1\sin\frac{\theta_1}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_1}{2} & i\sin\frac{\theta_1}{2} \\ i\sin\frac{\theta_1}{2} & \cos\frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.142}$$

$$\begin{aligned} \hat{R}(\theta_2) &\equiv e^{\frac{i}{\hbar}\hat{s}_2\theta_2} \\ &= e^{i\frac{\sigma_2}{2}\theta_2} = I\cos\frac{\theta_2}{2} + i\sigma_2\sin\frac{\theta_2}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_2}{2} & \sin\frac{\theta_2}{2} \\ -\sin\frac{\theta_2}{2} & \cos\frac{\theta_2}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.143}$$

が得られる．一般の回転演算子は

$$R(\boldsymbol{\theta})_{s=1/2} = e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\boldsymbol{\theta})} = e^{\frac{i}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta})} \tag{4.144}$$

である．すでに気付いているかも知れないが，$s = 1$ の場合の表現は実数の要素を持つ実直交行列であった．一方 $s = 1/2$ の表現に現れる行列には複素数が含まれていて，$U^\dagger U = UU^\dagger = I$ でかつ行列式 $\det U = 1$ を満たす行列であることが分かる．このような 2 行 2 列の行列全体は SU(2) 群，即ち 2 行 2 列の「特殊ユニタリ群（special unitary group）」を作る．従って $s = 1/2$ の表現は SU(2) の表現である．$s = 1$ の表現は SO(3) 群の表現であるが，群の交換関係は後ほど確認するように全く同じなので，SU(2) の $s = 1$ 表現と

いうことができる．従って $s = (1/2, 1)$ は共に SU(2) の表現である．2 つの群は，角度を大きくして大局的に見ると違いが現れる．例えば $R(\theta_3)_{s=1}$ と $R(\theta_3)_{s=1/2}$ において，θ_3 を空間一周に相当する 2π に選んでみよう．そうすると $R(\theta_3 = 2\pi)_{s=1} = I$ であるが，$R(\theta_3 = 2\pi)_{s=1/2} = -I$ と違いが現れる．空間を 2 周すると $R(\theta_3 = 4\pi)_{s=1/2} = I$ となる．通常の空間回転は 2π 回転すると元に戻るという約束で成り立っている．しかしながら $s = 1/2$ の表現は 2π 回転しても元に戻らずに符号を変え，4π 回転すると元に戻る．このような表現を「2 価表現（two valued representation）」といい，そのように変換する 2 成分の波動関数を「スピノール（spinor）」と呼ぶ．つまり SO(3) 群としては不思議な振る舞いではあるが，2 価表現である「スピノール表現（spinor representation）」を許容するならば，SO(3) 群と SU(2) 群の表現は同一である．

スピンの「上昇演算子（raising operator）」σ_+ と「下降演算子（lowering operator）」σ_- を次のように導入する．

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y), \tag{4.145}$$

$$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y). \tag{4.146}$$

これを波動関数に演算すると

$$\sigma_+ \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_\uparrow \end{pmatrix}, \quad \sigma_- \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_\downarrow \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.147}$$

となる．スピンの大きさは

$$(\hat{\boldsymbol{s}})^2 = \hbar^2 \frac{3}{4} \hat{I} = \hbar^2 \left(s(s+1) \right) \hat{I} \tag{4.148}$$

となる．従ってスピンの大きさは $s = 1/2$ である．スピン演算子が次の関係式を満たすことは直接行列の積を作って確かめることができる．

$$\left[\left(\frac{1}{\hbar} \hat{s}^i \right), \left(\frac{1}{\hbar} \hat{s}^j \right) \right] = i\epsilon_{ijk} \left(\frac{1}{\hbar} \hat{s}^k \right), \quad \text{or} \tag{4.149}$$

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}. \tag{4.150}$$

この関係式は SO(3) 群の交換関係と同じである．この関係式を満足させるためには，$\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$ を生成演算子としなければならず，2 倍した $\boldsymbol{\sigma}$ ではいけないことに注意しよう．そのためスピン 1/2 の表現では，回転行列に角度 $\theta/2$ が現れたのである．群の交換関係は生成演算子の係数まで決めることを覚えておこう．

4.4 スピン 1/2 の粒子の波動方程式

次にスピン 1/2 粒子を記述する波の方程式を調べよう．量子力学において，

例えば水素原子の中の電子の波を記述するときにシュレーディンガー方程式を用いる．ここではシュレーディンガー方程式を非相対論的な場合のスピン 1/2 の波動方程式と考え，相対性理論に移行すると「ディラック方程式（Dirac equation）」につながると考える．なぜこのように考えるのかを少し説明する．上で述べたように $s=0$ の粒子の場合には，例え非相対論であったとしてもシュレーディンガー方程式は現れない．$s=1$ のフォトンの場合は元々相対論であり，シュレーディンガー方程式では記述できない．従ってシュレーディンガー方程式が現れるのは $s=1/2$ 粒子に関わる非相対論的な問題*2) のみである．

もう 1 つの理由は，シュレーディンガー方程式あるいはディラック方程式では場の運動量の取り扱いが通常とは異なるからである．これらの方程式では場の変数は複素数であり，それを $\psi(x)$ で表すと，その共役運動量は $\psi(x)$ の複素共役となる．これは運動方程式が時間の一階微分であることと関係している．従って座標と運動量で積分する我々が用いる経路積分において，運動量を積分して座標変数のみの経路積分へ移行することはできない．なぜならば元の座標変数（場の変数）の複素共役は消去してはならない変数だからである．即ちシュレーディンガー方程式あるいはディラック方程式における経路積分は，座標と運動量で積分する形式のものに限られる．従ってシュレーディンガー方程式あるいはディラック方程式は同じ種類の波動方程式であり，一方を非相対論的な場合，他方を相対論的な場合の $s=1/2$ 粒子の波動方程式と考えることができる．

先ず非相対論的（non-relativistic）な場合から始める．2 成分の波動関数 $\psi(x)_{\rm NR}$ は

$$\psi(x)_{\rm NR}=\begin{pmatrix}\psi_\uparrow(x)\\ \psi_\downarrow(x)\end{pmatrix} \tag{4.151}$$

であった．これに対する作用 $S_{\rm NR}$ は

$$S_{\rm NR}=\int dtd^3x\quad\left(\psi(x)^\dagger i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}-\mathcal{H}(s=1/2)_{\rm NR}\right),\ \text{with} \tag{4.152}$$

$$\mathcal{H}(s=1/2)_{\rm NR}=\psi(x)^\dagger\left(\frac{1}{2m}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2+V(x)\right)\psi(x). \tag{4.153}$$

$\pi_\psi=i\hbar\psi^\dagger$ とすると，運動方程式は

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}&=i\hbar\frac{\delta H(s=1/2)_{\rm NR}}{\delta\pi_\psi(x)}=\frac{\delta H(s=1/2)_{\rm NR}}{\delta\psi(x)^\dagger}\\
&=\left(\frac{1}{2m}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2+V(x)\right)\psi(x), \qquad (4.154)\\
i\hbar\frac{\partial\psi(x)^\dagger}{\partial t}&=\frac{\partial\pi_\psi}{\partial t}=-\frac{\delta H(s=1/2)_{\rm NR}}{\delta\psi(x)}
\end{aligned}$$

*2)　もちろん $s=1/2$ 粒子の多体系でもよい．

$$= -\left(\frac{1}{2m}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2 + V(x)\right)\psi(x)^\dagger. \tag{4.155}$$

上記の 2 つの方程式は同じ方程式であり，通常のシュレーディンガー方程式を再現している．

次に相対論的な場合の波動方程式であるが，シュレーディンガー方程式と同じ形だとすると

$$S_{\mathrm{R}} = \int dt d^3x \quad \left(\psi(x)^\dagger i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} - \mathcal{H}(s=1/2)_{\mathrm{R}}\right), \quad \text{with} \tag{4.156}$$

$$H(s=1/2)_{\mathrm{R}} = \int d^3x\ \mathcal{H}(s=1/2)_{\mathrm{R}} \tag{4.157}$$

であり，運動方程式は $\pi_\psi = i\hbar\psi^\dagger$ として，

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = \frac{\delta H(s=1/2)_{\mathrm{R}}}{\delta\psi(x)^\dagger} \tag{4.158}$$

であるが，さて $H(s=1/2)_{\mathrm{R}}$ は何であるかが問題となる．この問題はポール・ディラック（P.A.M. Dirac）によって 1928 年に解決された．答えは

$$H(s=1/2)_{\mathrm{R}} = \int d^3x\ \psi(x)^\dagger \left(c\ \boldsymbol{\alpha}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}) + \beta\ mc^2\right)\psi(x) \tag{4.159}$$

である．従って波動方程式は

$$\begin{aligned}
&\left(i\hbar\partial_t - c\ \boldsymbol{\alpha}(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}) - \beta\ mc^2\right)\psi(x) \\
&= \left(c(\hat{p}^0 - \boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{p}}) - \beta\ mc^2\right)\psi(x) = 0
\end{aligned} \tag{4.160}$$

となる．これを「ディラック方程式 (Dirac equation)」という．ここでの $\psi(x)$ は 2 成分ではなく 4 成分の波動関数であり，$\boldsymbol{\alpha}$ と β はそれに作用するものなので 4 行 4 列の行列であり，次の性質を持つ．即ち

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}, \quad \{\alpha^i, \beta\} = 0, \quad \beta^2 = 1. \tag{4.161}$$

ここに現れた反交換関係は $\{A, B\} = AB + BA$ である．なぜ上記の関係式が必要かというと，下記のように (4.160) の左からディラック方程式の演算子の中にある m の符号を逆にした演算子（これは E と $\boldsymbol{p}$ の符号を逆にすることに相当する）を掛けたいのだけれど，そのとき上記の関係式 (4.161) があると次のように変形できるからである．即ち，

$$\left(c(\hat{p}^0 - \boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{p}}) + \beta\ mc^2\right)\left(c(\hat{p}^0 - \boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{p}}) - \beta\ mc^2\right)\psi(x) \tag{4.162}$$

$$= c^2\left((\hat{p}^0)^2 - (\hat{\boldsymbol{p}})^2 - (mc)^2\right)\psi(x) = 0 \tag{4.163}$$

という変形ができる．最後の式は質量 m のクライン–ゴルドン方程式と同じ形なので，$(p^0)^2 - (\boldsymbol{p})^2 = (mc)^2$ という質量 m の粒子に対するエネルギーと運動量の関係を満たす波が得られる．そのために $\boldsymbol{\alpha}$ と β が上の関係式 (4.161)

を満足する必要があったのである．

次にディラック方程式あるいは $s=1/2$ 粒子に対する作用 $S_{\rm R}$ が，相対論的に不変量であることを示そう．もう一度作用を演算子を用いて書くと

$$S_{\rm R} \equiv \int dtd^3x\ \mathcal{L}(x)_{\rm Dirac} \tag{4.164}$$

$$= \int dtd^3x\ \left[\psi(x)^\dagger \left(c(\hat{p}^0 - \boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{p}}) - \beta\ mc^2\right)\psi(x)\right] \tag{4.165}$$

$$= \int dtd^3x\ \left[\psi(x)^\dagger \left(c(\alpha^\mu p_\mu) - \beta\ mc^2\right)\psi(x)\right]. \tag{4.166}$$

最後のところで，敢えて 4×4 の単位行列を $\alpha^0=\alpha_0=I$ として導入して相対論的に書いた．$\mathcal{L}(x)_{\rm Dirac}$ はラグランジアン密度である．実際に相対論的に不変であることをこれから示すが，そのとき

$$j^\mu(x) = \psi(x)^\dagger\alpha^\mu\psi(x) \tag{4.167}$$

がローレンツ変換によって反変ベクトルの変換をし，

$$\psi(x)^\dagger\beta\psi(x) \tag{4.168}$$

がローレンツ変換で不変なスカラーになることを理解する必要がある．その結果として，より相対性理論の変換則を明白にするために，

$$\psi(x)^\dagger\beta \equiv \overline{\psi}(x), \tag{4.169}$$

$$\gamma^0=\beta,\ \gamma^i=\beta\alpha^i \tag{4.170}$$

を用いることが多い．$\overline{\psi}(x)$ を「ディラック共役（Dirac conjutate)」といい，γ^μ を「ガンマ行列（gamma matrix)」という．

こうしておくと様々なものを，次のように見通しよく書くことができる．

$$S_{\rm R} = \int d^4x\ \left[\overline{\psi}(x)\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\psi(x)\right],\ (s{=}1/2\ \text{action}) \tag{4.171}$$

$$\left(\hat{p}_\mu\gamma^\mu - mc\right)\psi(x) = \left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\psi(x) = 0,\ (\text{Dirac eqn}) \tag{4.172}$$

$$j^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x),\ (4\ \text{dimensional current}) \tag{4.173}$$

$$\overline{\psi}(x)\psi(x).\ (\text{Lorentz scalar}) \tag{4.174}$$

ガンマ行列が次の反交換関係を満たすことは $\boldsymbol{\alpha}$ と β の関係式から直ぐに理解できる．即ち

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}(=2\eta^{\mu\nu}). \tag{4.175}$$

但し $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルであるが，今考えているのは重力が働かない場合なので単なる定数であり，$g_{\mu\nu}=\pm\delta_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}=\pm\delta^{\mu\nu}$ である．$\pm$ は (μ,ν) が共に時間成分のときには $+$，共に空間成分のときには $-$ に取る．この場合 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ と書くことが多い．特殊相対性理論の場合（即ち重力が働いていない場合）に

は，この $\eta_{\mu\nu}$ を使えば反変ベクトルと共変ベクトルの入れ替えが実行されることが分かる．

ここで $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\sigma}$，β，γ^μ の行列表現を書いておく．色々な表現の仕方がある．ここでは $s = 1/2$ の粒子に質量を持たせる対称性の破れを議論したいので，質量 0 の場合の対称性を反映する「カイラル基底（chiral base）」あるいはヘルマン・ワイルが最初にやったので「ワイル基底（Weyl base）」とも呼ばれる基底を取ろう．基底とは波動関数の並べ方である．4 成分の波動関数を 2 成分の 2 つの波動関数 $\psi(x)_R$ と $\psi(x)_L$ を縦に並べたものとする．前者を「右巻きまたは右利き（right-handed）」，後者を「左巻きまたは左利き（left-handed）」となるように波動関数を選んで並べるのがカイラル基底である．即ち

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x)_R \\ \psi(x)_L \end{pmatrix}. \tag{4.176}$$

右利きと左利きを区別する演算子を，「カイラリティー演算子（chirality operator）」γ^5 として

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{4.177}$$

導入すると（但し I は 2 行 2 列の単位行列），

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} \psi(x)_R \\ \psi(x)_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(x)_R \\ -\psi(x)_L \end{pmatrix} \tag{4.178}$$

となる．カイラリティー演算子の固有値を「カイラリティー（chirarity）」と呼ぶことにすると，$\psi(x)_R$ はカイラリティー「＋」，$\psi(x)_L$ はカイラリティー「－」である．カイラリティーとは右利きか左利きかという利き腕の違い（手掌性）を表す言葉である．このカイラル基底では，

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.179}$$

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{4.180}$$

となる．ここでは左辺に現れる $\boldsymbol{\sigma}$ は 4 行 4 列であるが，間違わないと思うので同じ記号を使った．γ^5 は全ての γ^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ と反交換する演算子

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \tag{4.181}$$

として導入することができて，次の関係式を満たすというのがカイラル基底の行列表現の意味である．

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\alpha^1\alpha^2\alpha^3. \tag{4.182}$$

スピノールを回転させる演算子 $\hat{R}(\boldsymbol{\theta})$ を 4 行 4 列のシグマ行列を用いて，

$$\hat{R}(\boldsymbol{\theta})_{s=1/2} = e^{-\frac{i}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta})} \tag{4.183}$$

とする．そうすると 2 成分の波動関数（スピノール）ではなく 4 成分の波動関数（スピノール）を回転させることになる．ローレンツ変換と同じ趣旨にするために，座標系の回転（以前は粒子の位置ベクトルの回転）としたので，角度が以前用いたものと逆符号になっている点に注意しよう．

x^3 軸の周りに x^1 軸と x^2 軸を θ_3 回転させると，

$$
\begin{aligned}
&\psi(x)^\dagger \hat{R}(\theta_3)^\dagger_{s=1/2}(p'^1\alpha^1 + p'^2\alpha^2)\hat{R}(\theta_3)_{s=1/2}\psi(x) \\
&= \psi(x)^\dagger \left(\cos\frac{\theta_3}{2} + i\sigma_3 \sin\frac{\theta_3}{2}\right)(p'^1\alpha^1 + p'^2\alpha^2)\left(\cos\frac{\theta_3}{2} - i\sigma_3\sin\frac{\theta_3}{2}\right)\psi(x) \\
&= \psi(x)^\dagger \left((p'^1\cos\theta_3 - p'^2\sin\theta_3)\alpha_1 + (p'^1\sin\theta_3 + p'^2\cos\theta_3)\alpha_2\right)\psi(x) \\
&= \psi(x)^\dagger(p^1\alpha^1 + p^2\alpha^2)\psi(x), \qquad (4.184) \\
&\psi(x)^\dagger \hat{R}(\theta_3)^\dagger_{s=1/2}(p'^0 - \beta mc)\hat{R}(\theta_3)_{s=1/2,R}\psi(x) \\
&= \psi(x)^\dagger(p^0 - \beta mc)\psi(x). \qquad (4.185)
\end{aligned}
$$

従って $\mathcal{L}(x)_{\mathrm{Dirac}}$ は x^3 軸周りの座標系の回転に対して不変である．同じように x^1 軸，x^2 軸周りの座標系の回転に対しても不変である．

次に x^3 軸方向へのローレンツ変換を調べよう．今回ローレンツ変換に現れるパラメータを $\boldsymbol{\alpha_L}$ としよう．行列 $\boldsymbol{\alpha}$ と混同しないため添字の L を付ける．ローレンツ変換には sin，cos は現れず，sinh，cosh が現れた．従って「ローレンツ変換（Lorentz boost）」の演算子 $\hat{K}(\boldsymbol{\alpha}_L)_{s=1/2}$ は指数関数の肩に i が付かない

$$
\hat{K}(\boldsymbol{\alpha}_L)_{s=1/2} = e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}_L)} \qquad (4.186)
$$

であるだろう．そうすると

$$
\begin{aligned}
&\psi(x)^\dagger \hat{K}(\boldsymbol{\alpha}^3_L)^\dagger_{s=1/2}(p'^0\alpha^0 - p'^3\alpha^3)\hat{K}(\boldsymbol{\alpha}^3_L)_{s=1/2}\psi(x) \\
&= \psi(x)^\dagger\left(\cosh\frac{\alpha^3_L}{2} - \alpha_3\sinh\frac{\alpha^3_L}{2}\right)(p'^0\alpha^0 - p'^3\alpha^3) \\
&\qquad \times\left(\cosh\frac{\alpha^3_L}{2} - \alpha_3\sinh\frac{\alpha^3_L}{2}\right)\psi(x) \\
&= \psi(x)^\dagger\left((p'^0\cosh\alpha^3_L + p'^3\sinh\alpha^3_L)\alpha^0\right. \\
&\qquad \left.-(p'^0\sinh\alpha^3_L + p'^3\cosh\alpha^3_L)\alpha_3\right)\psi(x) \\
&= \psi(x)^\dagger(p^0\alpha^0 - p^3\alpha^3)\psi(x), \qquad (4.187) \\
&\psi(x)^\dagger \hat{K}(\boldsymbol{\alpha}^3_L)^\dagger_{s=1/2}\beta\hat{K}(\boldsymbol{\alpha}^3_L)_{s=1/2}\psi(x) = \psi(x)^\dagger\beta\psi(x). \qquad (4.188)
\end{aligned}
$$

従って，$\psi(x)^\dagger\alpha^\mu\psi(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ はベクトルの変換をし，$\psi(x)^\dagger\beta\psi(x) = \overline{\psi}(x)\psi(x)$ はローレンツ変換不変であることが分かった．同時に $\mathcal{L}(x)_{\mathrm{Dirac}}$ が x^3 方向へのローレンツ変換不変であることも証明できた．同じように，全ての方向へのローレンツ変換に対する不変性が証明できる．

このように 3 種類の空間回転と 3 種類のローレンツ変換は全体として群になる．この変換を生成する演算子は $\{\boldsymbol{K} = \frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\}$ である．この 6 つの生成演算子の間の交換関係をまとめると

$$[K^i, K^j] = -i\epsilon_{ijk}L^k,\ [L^i, L^j] = i\epsilon_{ijk}L^k,\ [K^i, L^j] = i\epsilon_{ijk}K^k. \tag{4.189}$$

この生成演算子で生成される変換は $-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ を不変とする変換なので SO(1,3) 群を構成する．(1,3) は，4 つの座標の内 1 成分に関しては，二乗の前の符号が「$-$」，他の 3 成分に関しては前の符号が「$+$」であることを表している．この符号の違いが上記の生成演算子の交換関係にも現れている．群の生成演算子の集団は，2 つの元の間で足し算あるいは交換関係を取った後にも同じ集団に属する．交換関係を取ることを積の演算と考えると，和の演算と積の演算で閉じる集団である．このような集団を「代数 (algegra)」という．リー群 G の生成演算子全体の集団を「リー代数 (Lie algebra)」と呼び，小文字の花文字 $\mathfrak{g}$ で表すのが慣例となっている．

ディラック方程式をカイラル基底で分解してみると，質量項にある β は R-hand の ψ_R と L-hand の ψ_L を入れ替える働きがあるので，

$$\left(\frac{E}{c} - \boldsymbol{\sigma p}\right)\psi_R = mc\,\psi_L,\quad \left(\frac{E}{c} + \boldsymbol{\sigma p}\right)\psi_L = mc\,\psi_R \tag{4.190}$$

という 2 つの方程式に分解される．但し

$$\frac{E}{c} = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + (mc)^2} \tag{4.191}$$

である．質量が 0 ならば，R-hand の ψ_R と L-hand の ψ_L は混じり合わずに独立しているが，質量が発生すると ψ_R と ψ_L が混じり合う．これが南部による $s = 1/2$ の粒子の質量生成機構の出発点である．その前に超伝導の微視的理論である「BCS 理論」を説明する必要がある．

4.5 超伝導の微視的理論：BCS 理論 (1957)

超伝導の微視的理論は，1957 年にバーディーン，クーパー，シュリーファー (J. Bardeen, F.N. Cooper, J.R. Schrieffer) の 3 人の論文によって提案された[6]．これを著者の名前の頭文字を取って「BCS 理論 (BCS theory)」という．ギンツブルグ–ランダウ理論では現象論的に，超伝導体内では電子が集団運動を起こし，その結果として電荷 Q を持つ波動関数 $\Psi(x)$ が現れるとしたが，この波動関数を電子の集団運動から微視的に導出する理論である．先ず電子は，陽イオンでできた格子の振動の波を記述する粒子であるフォノンと相互作用する．位置 x における体積の変化をスカラー場 $\phi(x)$ を用いて $d^3x \to d^3x\,(1 - \phi(x))$ と表そう．格子を組んでいる陽イオンの体積が減少 ($\phi(x) > 0$) すると，その場所での $+$ 電荷が増加するので，そこに電子が引き寄せられて電子数が増加

し，電子に対するハミルトニアン密度が増える．このハミルトニアンの増加を f を定数として，

$$\Delta\mathcal{H} = f\psi(x)^{\dagger}\psi(x)\phi(x) \tag{4.192}$$

としてよいだろう．この問題は非相対論的に扱うので，電子に対してスピンがアップとダウンの 2 成分からなる波動関数 $\psi(x)_{NR}$ を用いることにすると，電子とフォノンおよび電子とフォトンとの相互作用を記述するラグランジアン密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\ \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}(x)^2 - \boldsymbol{B}(x)^2\right) + i\hbar\psi(x)^{\dagger}\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} \\ &- \psi(x)^{\dagger}\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} + \frac{e_0}{c}\boldsymbol{A}(x)\right)^2\psi(x) \\ &+ \frac{1}{2v_s^2}\left(\frac{\partial\phi(x)}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\phi(x)\right)^2 - f\psi(x)^{\dagger}\psi(x)\phi(x)\end{aligned} \tag{4.193}$$

となる．電子の電荷は $-e_0$，フォノンは中性とした．

ここで $\phi(x)$ に関する経路積分を実行し，$\phi(x)$ を消去しよう．そのとき用いる公式 (4.83) はすでに説明した．即ち

$$\hat{A}(x) = -\frac{1}{v_s^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + (\boldsymbol{\nabla})^2, \tag{4.194}$$

と置くと，積分後のラグランジュ密度にはフォノンの寄与として

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2}f(\psi(x)^{\dagger}\psi(x))\hat{A}(x)^{-1}f(\psi(x)^{\dagger}\psi(x)) \tag{4.195}$$

が付け加わる．これがフォノンの媒介によって現れる電子間相互作用である．$\hat{A}^{-1}(x)$ を求めよう．それは

$$\hat{A}(x)D(x-y) = \delta^{(4)}(x-y), \tag{4.196}$$

を満たす関数を求めることに相当する．4 次元積分で書かれた演算子の逆数を求めるときの，「行列の 1」に相当するものは $\delta^{(4)}(x-y)$ である．何故ならこの場合「行列」の積は

$$(AB)(x,u) = \int d^4y\ d^4z\ A(x,y)\delta^{(4)}(y-z)B(z,u) \tag{4.197}$$

で与えられるからである．$D(x-y)$ を波の重ね合わせとして解こう．即ち

$$D(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}D(k)e^{-ik_{\mu}(x-y)^{\mu}} \tag{4.198}$$

を (4.196) に代入すると，

$$\hat{A}(x)D(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}D(k)\left(\frac{1}{v_s^2}(k^0)^2 - (\boldsymbol{k})^2\right)e^{-ik_{\mu}(x-y)^{\mu}}. \tag{4.199}$$

もしも

$$D(k)\left(\frac{1}{v_s^2}(k^0)^2-(\boldsymbol{k})^2\right)=1 \tag{4.200}$$

ならば右辺は 4 次元のデルタ関数になることはすでに知っている．従って，

$$D(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{\left(\frac{k^0}{v_s}\right)^2-(\boldsymbol{k})^2}e^{-ik_\mu(x-y)^\mu} \tag{4.201}$$

と求まる．この関数 $D(x-y)$ をフォノンの「伝搬関数（propagator）」という．伝搬関数とは，x の位置で発生した波が球面波として伝搬して y に到達したとき，y における波動関数が出発時の波動関数の $D(x-y)$ 倍になることを意味する．もちろん経路積分を実行したのだから，x から y に至るあらゆる経路を通って伝搬する波を重ね合わた結果得られたものである．従って，フォノンの媒介によって得られる電子間「相互作用（interaction)」を与えるラグランジュ密度 $\mathcal{L}_I$ は次のようになる．

$$\mathcal{L}_I=-\frac{f^2}{2}\int d^4y\left(\psi(x)^\dagger\psi(x)\right)D(x-y)\left(\psi(y)^\dagger\psi(y)\right). \tag{4.202}$$

一般的な $D(x-y)$ では扱いが難しいので，これを扱い易くしたいがどうしたらよいだろうか．電磁場のクーロン力に関しては，以下のことを知っている．ガウスの法則から $\boldsymbol{x}$ に置いた点電荷 Q と $\boldsymbol{y}$ に置いた点電荷 Q' の間に働く力のポテンシャルエネルギー $V(x-y)$ は，$\boldsymbol{y}$ に置いた点電荷 Q' によって生じるスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ に Q を掛けると求まる．従って $-\boldsymbol{\nabla}^2V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=QQ'\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ を満たすので，

$$V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\frac{QQ'}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{4.203}$$

である．これを今の問題に焼き直すと電磁気では，$\hat{A}$ は 3 次元的な $\hat{A}^{(3)}=-\boldsymbol{\nabla}^2$ であり，

$$V(x-y)=QQ'D^{(3)}(x-y)=QQ'\int\frac{d^3x}{(2\pi)^3}\ \frac{1}{(+\boldsymbol{k}^2)}e^{i\boldsymbol{kx}} \tag{4.204}$$

$$=QQ'\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{4.205}$$

である．$QQ'>0$ の時は斥力，$QQ'<0$ の時は引力である．さてフォノンの伝搬関数 $D(x-y)$ は 4 次元的ではあるが，もしも $(k^0)^2\ll(\boldsymbol{k})^2$ であるならば，被積分関数にある k^0 を無視できるので k^0 積分を実行すると

$$D(x-y)=-\delta(x^0-y^0)D^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\delta(x^0-y^0)\frac{-1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{4.206}$$

となり力は引力となる．上の 2 つの式で何故符号が異なるのだろうか．同種の電荷の間に働くクーロン力（スカラーポテンシャルによって生じる力）は反発力であるのに対し，同種の電子の間をフォノンが媒介して生じる力は引力なのかを理解しておくことは重要である．違いは電磁気の場合には作用へのスカ

ラーポテンシャルの寄与が $\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2$ であるのに対して，作用へのフォノンの寄与は符号が逆の $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2$ であることに起因する．そのため $\hat{A}$ の符号が逆になる．実はフォノンの作用への寄与の方が普通であり時間的に伝搬する通常の粒子を表す．一方電磁場のスカラーポテンシャル方は普通ではなく作用に逆符号に寄与する．電磁場のスカラーポテンシャルは時間に依存しないので通常の粒子を表すものではなく，ガウスの拘束条件を出す場であるからである．

このようにして 2 つの電子の間にフォノンが媒介する引力が発生すると考えることができた．電子同士なので電気的には斥力がある．差し引き引力となるためにはフォノン交換による引力がクーロン斥力に勝たなければならない．つまり $f^2 \gg (e_0)^2$ が成り立つ必要がある．引力を再現するように，パラメータ $V(>0)$ を導入して次のように簡単化する．これは最も鋭い引力ポテンシャルである．

$$\frac{f^2}{2}D(x-y) \approx -V\delta^{(4)}(x-y). \tag{4.207}$$

さてその時何が起こるかであるが，2 つの電子の間に引力が働くので，2 つの電子はペアを組んで複合粒子になると考えられる．このペアを「クーパーペア（Cooper pair）」という．クーパーペアの波動関数を $\Psi(x,y)$ とすると，

$$\Psi(x,y) \equiv \psi(x)\psi(y). \tag{4.208}$$

このときこの相互作用の「作用（action）」への寄与 S_I は

$$\begin{aligned} S_I &= -\frac{f^2}{2c}\int d^4x \int d^4y\ \Psi(x,y)^\dagger D(x-y)\Psi(x,y) && (4.209) \\ &= \frac{V}{c}\int d^4x\ \psi(x)^\dagger\psi(x)^\dagger\psi(x)\psi(x). && (4.210) \\ &= \frac{V}{c}\int d^4x\ \Psi(x,x)^\dagger\Psi(x,x) && (4.211) \end{aligned}$$

となる．ここで (4.207) の近似を用いた．この相互作用はフェルミ粒子が 4 つ，同じ時刻に同じ場所で相互作用している．これを「4 体フェルミ相互作用 (four Fermi interaction)」と呼ぶ．エンリコ・フェルミが弱い相互作用を表そうとして用いた相互作用の形である．通常 BCS 理論の相互作用は運動量表示で議論するが，ここでは敢えて座標表示にこだわった．その結果「4 体フェルミ相互作用」で記述できることが自然に理解できたので，この方がより分かり易い説明であると思う．次節の南部理論でもこの「4 体フェルミ相互作用」が現れるが，それは相互作用の本質を保持しながら，最もシンプルに相互作用を記述する方法だからである．このようにすれば超伝導と南部理論は同じ「4 体フェルミ相互作用」で議論することができる．

次に超伝導を理解するために「ハートリー–フォック近似（Hartree-Fock approximation)」あるいは「自己無撞着近似（self-consistent approximation)」

という方法を用いる．「始めにそれらしい仮定を行い，後にその仮定が矛盾しないことを確認する」という方法である．自己無撞着，英語の方が分かり易く self-consistent な解を求める方法である．こうすると，通常相互作用がない状態から少しずつ相互作用を入れて行くという「摂動論 (perturbation theory)」（後に説明する）では到達できない，思いがけない解を導くことが可能となる．超伝導は正にその例となっている．さて超伝導媒質中での物理量の平均値を $\langle ... \rangle$ で表して，

$$\langle \Psi(x,x) \rangle = \Psi(0,0) = \phi = \text{const.} \tag{4.212}$$

と仮定し，後にそれが矛盾しないことを確認することにしよう．超伝導体の内部で一様にクーパーペアが存在するはずだから，クーパーペアの波動関数の平均値を時間と空間に依らず一定とするのは，それ程悪い仮定ではないだろう．この仮定の下に，(4.211) の波動関数の積に対して，その一つを平均値で置き換える．これがハートリー–フォック近似における常套手段である．即ち，

$$\begin{aligned} S_I &= +\frac{V}{c}\int d^4x \left(\Psi(x,x)^\dagger \phi + \phi^\dagger \Psi(x,x)\right) \qquad (4.213)\\ &= +\frac{V}{c}\int d^4x \int d^4y \delta(x^0-y^0)\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\left(\Psi(x,y)^\dagger \phi + \phi^\dagger \Psi(x,y)\right) \end{aligned}$$

と近似する．

一方相互作用をしない（自由粒子の）作用 S_0 には，x と y にある 2 つの電子が寄与する．即ち

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{c}\int d^4x \int d^4y \delta(x^0-y^0) \qquad (4.214)\\ &\times\ \Psi(x,y)^\dagger \left\{ i\hbar c\left(\frac{\partial}{\partial x^0}+\frac{\partial}{\partial y^0}\right) - \frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}_x)^2+(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}_y)^2}{2m}\right\}\Psi(x,y). \end{aligned}$$

これは波動関数が $\int d^3x\psi(x)^\dagger\psi(x) = 1$ と規格化されていれば 2 つの自由電子の作用を与えるので正しい表式である．従って $S = S_0 + S_I$ から運動方程式を導出すると

$$\begin{aligned} &\left\{ i\hbar\partial_t - \frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}_x)^2+(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}_y)^2}{2m}\right\}\Psi(x,y)|_{x_0=y_0=ct}\\ &= -V\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi = -V\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\Psi(0,0) \qquad (4.215) \end{aligned}$$

となる．重心運動は重要でないのでこれを無視すると，2 個の電子の波数ベクトルは $(\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k})$ になる．そのとき 2 体の波動関数 $\Psi(x,y)$ は

$$\Psi(x,y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g(\boldsymbol{k}) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}$$

となるので，これを上で求めた運動方程式に代入すると

$$\left\{ E - 2\frac{(\hbar\boldsymbol{k})^2}{2m}\right\} g(\boldsymbol{k}) = -V\phi = -V\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g(\boldsymbol{k}) \tag{4.216}$$

となる．この方程式を解こう．$g(\boldsymbol{k})$ はクーパーペアの運動エネルギー $\epsilon = 2\frac{(\hbar\boldsymbol{k})^2}{2m}$ の関数としてよいだろう．$\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ は波数ベクトルがその範囲に入る状態密度（直ぐ下で説明する）であるから，単位エネルギー当たりの状態数*3) を $\rho(\epsilon)$ とすると

$$(E-\epsilon)g(\epsilon) = -V\phi = -V\int_{2\varepsilon_F}^{2(\varepsilon_F+\hbar\omega_D)} d\epsilon\ \rho(\epsilon)g(\epsilon) \tag{4.217}$$

が得られる．ここで $\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ が状態密度を表すことを説明しよう．波が一辺 L の箱の中に立っているとする．両端で波は同じとするならば，波数ベクトルは n_1, n_2, n_3 を整数として，

$$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3) \tag{4.218}$$

で表される．その一つ一つが一つの状態を表している．d^3k に含まれる状態数は，

$$\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = L^3\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \tag{4.219}$$

従って体積 L^3 で割ると単位体積当たりの状態数（状態密度）が得られる．

次にクーパーペアが取りうるエネルギーの範囲について補足する．通常の金属では，電子は低いエネルギーから順に詰まって行く．電子のスピンは 1/2 であってフェルミ粒子である．フェルミ粒子の特徴として，1 つのエネルギーレベル E_n にスピンのアップとダウンの状態を含めて 2 つしか電子を詰めることができない．従って電子は低いエネルギーから順に詰まって行って，ε_F 以下のエネルギーレベルは全部詰まっていると考えることができる．この電子が詰まっている最大のエネルギーをフェルミエネルギー（Fermi energy）と呼んで ε_F と書く．電子が自由に動くためには，フェルミエネルギーよりも大きなエネルギーを持つ必要がある．そこには詰まっていないエネルギーレベルが沢山あるので，そのようなレベルに遷移することによって電子が動くことができる．金属の「自由電子（free electron）」とはこのような状態をいう．ω_D は格子振動を粒子と見たときのフォノンが取りうる最大エネルギーである．例えば格子間隔を a とする．そこに発生する格子振動の波長 λ の最小値は a であろう．そうすると波数ベクトルの最大値は $2\pi/a$ となるので，フォノンの最大エネルギー ω_{max} は $2\pi v_s/a$ 程度となる．このようなフォノンとして取りうる最大エネルギーを「デバイ・エネルギー（Debye energy）」と呼んで $\hbar\omega_D$ で表す．従って各電子はフォノンから最大 $\hbar\omega_D$ のエネルギーをもらい得ると考えて $2(\varepsilon_F + \hbar\omega_D)$ をクーパーペアの最大エネルギーとした．

(4.217) 式に戻ろう．右辺は定数なので，$-V\phi$ とすると，

---

*3) これを単に「状態密度（density of states）」と呼ぶ．

$$g(\epsilon) = \phi V \frac{1}{\epsilon - E}. \tag{4.220}$$

これを右辺に代入すると

$$\phi = \phi V \int_{2\varepsilon_F}^{2(\varepsilon_F + \hbar\omega_D)} d\epsilon\, \rho(\epsilon) \frac{1}{\epsilon - E} \approx \phi \rho_F V \ln\left(\frac{2\epsilon_F + 2\hbar\omega_D - E}{2\epsilon_F - E}\right).$$

但し $\rho(\epsilon)$ をフェルミエネルギーにおける状態密度 ρ_F で近似した．この方程式には 2 つ解がある．1 つは $\phi = 0$ である．即ちクーパーペアの波動関数はゼロであるのでクーパーペアは存在しない．この場合は何も起こらないので通常の状態であり「ノーマル（normal）」な状態と呼ぶ．もう 1 つの解は $\phi \neq 0$ の場合である．この場合にはクーパーペアが存在し，「スーパー（super）」な状態と呼ぶ．このとき両辺を ϕ で割り算をして計算すると，クーパーペアのエネルギー E が以下のように得られる．

$$E \equiv 2\varepsilon_F - \Delta, \quad \text{where} \tag{4.221}$$

$$\Delta \approx \frac{\hbar\omega_D}{e^{\left(\frac{1}{\rho_F V}\right)} - 1} \approx 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{\rho_F V}}. \tag{4.222}$$

クーパーペアのエネルギーはフェルミエネルギーより低くなることが分かる．つまり電子 2 つがクーパーペアを作ることによってエネルギーが下がるので，より安定した状態となる．低くなった分は Δ である．この Δ を超伝導の「エネルギーギャップ（energy gap）」という．

これまで電子 2 個からなる複合系（クーパーペア）の波動関数を議論してきた．次に電子単体の波動関数を相互作用も含めて書き下して，ハートリー–フォック近似を用いて解くとどうなるかを調べよう．ボゴリュボフ（N.N. Bogoliubov）は 1958 年にこれを実行した[7]．$S = S_0 + S_I$ を電子の波動関数で書き下すと

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{c}\int d^4x \psi(x)^\dagger \left\{ i\hbar c \frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{(-i\hbar \nabla_x)^2}{2m} \right\} \psi(x) \\ &+ \frac{V}{c}\int d^4x \left(\psi(x)^\dagger \psi(x)^\dagger \psi(x)\psi(x)\right) \end{aligned} \tag{4.223}$$

$$\begin{aligned} =& \frac{1}{c}\int d^4x \psi(x)^\dagger \left\{ i\hbar c \frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{(-i\hbar \nabla_x)^2}{2m} \right\} \psi(x) \\ &+ \frac{V}{c}\int d^4x \left(\psi(x)^\dagger \psi(x)^\dagger \phi + \phi^\dagger \psi(x)\psi(x)\right). \end{aligned} \tag{4.224}$$

折角だからここで電子のスピンを復活しよう．電子の波動関数はスピンがアップの状態とダウンの状態の 2 成分から成り立っている．即ち

$$\psi(x) \Rightarrow \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(x) \\ \psi_\downarrow(x) \end{pmatrix} \tag{4.225}$$

と置き換える．クーパーペアとしては，スピン・アップの電子とスピン・ダウンの電子が結合して，全体としてスピン・ゼロの状態になっていると考える．

通常の超伝導はそうである．従って

$$\psi(x)\psi(x) \Rightarrow \psi_\uparrow(x)\psi_\downarrow(x),\ \psi(x)^\dagger\psi(x)^\dagger \Rightarrow \psi_\downarrow(x)^\dagger\psi_\uparrow(x)^\dagger \tag{4.226}$$

と置き換える．また

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{2}\left(\psi_\uparrow(x)\psi_\downarrow(y) - \psi_\downarrow(x)\psi_\uparrow(y)\right), \tag{4.227}$$

$$\phi = \langle\Psi(x,y)\rangle = \psi_\uparrow(0)\psi_\downarrow(0). \tag{4.228}$$

このようにスピンを導入すると，作用 (4.224) は次のようになる．

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{c}\int d^4x\psi_\uparrow(x)^\dagger\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2}{2m}\right\}\psi_\uparrow(x) \\ &+ \frac{1}{c}\int d^4x\psi_\downarrow(x)^\dagger\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2}{2m}\right\}\psi_\downarrow(x) \\ &+ \frac{V}{c}\int d^4x\left(\psi_\downarrow(x)^\dagger\psi_\uparrow(x)^\dagger\psi_\uparrow(x)\psi_\downarrow(x)\right) \end{aligned} \tag{4.229}$$

$$\begin{aligned} =& \frac{1}{c}\int d^4x\psi_\uparrow(x)^\dagger\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2}{2m}\right\}\psi_\uparrow(x) \\ &+ \frac{1}{c}\int d^4x\psi_\downarrow(x)^\dagger\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2}{2m}\right\}\psi_\downarrow(x) \\ &+ \frac{V}{c}\int d^4x\left(\psi_\downarrow(x)^\dagger\psi_\uparrow(x)^\dagger\phi + \phi^\dagger\psi_\uparrow(x)\psi_\downarrow(x)\right). \end{aligned} \tag{4.230}$$

ここで波動関数の並び順を確認しておこう．作用は実数，あるいは演算子の言葉でいうとエルミート演算子である．エルミート共役（複素共役を演算子に拡張したもので通常 † で表す）を取ったときに元に戻るものをエルミート演算子というが，エルミート共役を取ると演算子の並び順が逆転することを理解しておく必要がある．即ち

$$(ABC\ldots DE)^\dagger = E^\dagger D^\dagger\ldots C^\dagger B^\dagger A^\dagger. \tag{4.231}$$

従って，相互作用において $\left(\psi_\downarrow(x)^\dagger\psi_\uparrow(x)^\dagger\phi + \phi^\dagger\psi_\uparrow(x)\psi_\downarrow(x)\right)$ の順序で，正しくエルミートになっている．なぜ並び順を気にし始めたかを説明する．今考えているのは古典的な運動方程式なので，通常は波動関数の並び順に結果は依らない．しかしながらそれはスピンが整数のボース粒子の場合のみであって，スピンが半整数のフェルミ粒子の場合には古典論の段階から波動関数の順序が重要となる．さて 2 つのフェルミ粒子の波動関数は順序を交換すると符号が逆になると仮定しよう．つまり

$$\psi_A(x)\psi_B(y) = -\psi_B(y)\psi_A(x) \tag{4.232}$$

を仮定する．これを「反交換関係 (anti-commutation relation)」という．なぜこのように仮定するかというと，A と B をフェルミ粒子の状態とすると (4.232) から同じ状態 A に対して

$$\psi_A(x)\psi_A(x) = -\psi_A(x)\psi_A(x) = 0 \tag{4.233}$$

が言える．つまり「同じ時刻に同じ場所に，状態が A であるフェルミ粒子 2 個は存在できない」ことになる．これを「パウリの排他律（Pauli's exclusion princeple)」といって，フェルミ粒子の最も重要な性質である．この性質は古典論の段階から取り入れておく必要がある．

さて運動方程式を導出するときには汎関数微分 $\frac{\delta S}{\delta\psi(x)}$ を実行することになるが，$\psi(x)$ は作用の中で，色々な波動関数に挟まれて存在するだろう．そのとき汎関数微分したい $\psi(x)$ を例えば一番左に移動してから，汎関数微分を実行することにしよう．一番左に移動する際に，ボース粒子の波動関数とはそのまま交換できるが，フェルミ粒子の波動関数とは交換する度に符号を変えて交換しなければならない．このことに注意して慎重に汎関数微分を実行すると，以下の運動方程式が得られる．

$$\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2}{2m}\right\}\psi_\uparrow(x) = V\phi\psi_\downarrow(x)^\dagger, \tag{4.234}$$

$$\left\{-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2}{2m}\right\}\psi_\downarrow(x)^\dagger = -V\phi^\dagger\psi_\uparrow(x), \text{ and} \tag{4.235}$$

$$\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2}{2m}\right\}\psi_\downarrow(x) = -V\phi\psi_\uparrow(x)^\dagger, \tag{4.236}$$

$$\left\{-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2}{2m}\right\}\psi_\uparrow(x)^\dagger = V\phi^\dagger\psi_\downarrow(x). \tag{4.237}$$

最初の 2 式は $(\psi_\uparrow, \psi_\downarrow{}^\dagger)$ で閉じていて，後の 2 式は $(\psi_\downarrow, \psi_\uparrow{}^\dagger)$ で閉じている．さて E のエネルギーを持つ解を求めたいので，波動関数を異なる波数ベクトル（あるいは異なる運動量）を持つ波の重ね合わせとして表すと，

$$\psi_\uparrow(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\psi_\uparrow(\boldsymbol{p})e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{px}}, \tag{4.238}$$

$$\psi_\downarrow(x)^\dagger = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\psi_\downarrow(-\boldsymbol{p})^\dagger e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{px}}, \text{ and} \tag{4.239}$$

$$\psi_\downarrow(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\psi_\downarrow(\boldsymbol{p})e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{px}}, \tag{4.240}$$

$$\psi_\uparrow(x)^\dagger = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\psi_\uparrow(-\boldsymbol{p})^\dagger e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{px}} \tag{4.241}$$

である．少し補足する．先ず $\psi_\uparrow(x)$ と $\psi_\downarrow(x)$ の式を書いて，両辺の複素共役を取るとエネルギーが $-E$ 運動量が $-\boldsymbol{p}$ の波の重ね合わせの式となる．今欲しいのはエネルギーが E 運動量が $\boldsymbol{p}$ の波の重ね合わせの式なので，$\psi_\uparrow(x)^\dagger$ と $\psi_\downarrow(x)^\dagger$ では上記のようにする必要がある．少し後に粒子とホールとの対応を書いて更なる補足をする．

上記の波の重ね合わせの式を用いると運動量表示の運動方程式が得られる．

$$(E-\epsilon_p)\psi_\uparrow(\boldsymbol{p}) = V\phi\ \psi_\downarrow(-\boldsymbol{p})^\dagger, \tag{4.242}$$

$$(-E-\epsilon_p)\psi_\downarrow(-\boldsymbol{p})^\dagger = -V\phi^\dagger\ \psi_\uparrow(\boldsymbol{p}), \text{ and} \tag{4.243}$$

$$(E-\epsilon_p)\psi_\downarrow(\boldsymbol{p}) = -V\phi\ \psi_\uparrow(-\boldsymbol{p})^\dagger, \tag{4.244}$$

$$(-E-\epsilon_p)\psi_\uparrow(-\boldsymbol{p})^\dagger = V\phi^\dagger\ \psi_\downarrow(\boldsymbol{p}). \tag{4.245}$$

これは 2 行 2 列のハミルトニアンを対角化して，固有値と固有ベクトルを求める問題である．最初の 2 つの方程式では，以下のようにハミルトニアン $\hat{H}_{\uparrow p}$ 導入すると，波動関数 $\psi_\uparrow(\boldsymbol{p})$ と $\psi_\downarrow(-\boldsymbol{p})^\dagger$ とが混ぜ合わされる．即ち，

$$\hat{H}_{\uparrow p}\begin{pmatrix}\psi_\uparrow(\boldsymbol{p})\\ \psi_\downarrow(-\boldsymbol{p})^\dagger\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\epsilon_p & V\phi\\ V\phi^\dagger & -\epsilon_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_\uparrow(\boldsymbol{p})\\ \psi_\downarrow(-\boldsymbol{p})^\dagger\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\psi_\uparrow(\boldsymbol{p})\\ \psi_\downarrow(-\boldsymbol{p})^\dagger\end{pmatrix}.$$

次の 2 つの方程式では，ハミルトニアンを $\hat{H}_{\downarrow p}$ とすると，波動関数 $\psi_\downarrow(\boldsymbol{p})$ と $\psi_\uparrow(-\boldsymbol{p})^\dagger$ とが混ぜ合わされる．即ち

$$\hat{H}_{\downarrow p}\begin{pmatrix}\psi_\downarrow(\boldsymbol{p})\\ \psi_\uparrow(-\boldsymbol{p})^\dagger\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\epsilon_p & -V\phi\\ -V\phi^\dagger & -\epsilon_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_\downarrow(\boldsymbol{p})\\ \psi_\uparrow(-\boldsymbol{p})^\dagger\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\psi_\downarrow(\boldsymbol{p})\\ \psi_\uparrow(-\boldsymbol{p})^\dagger\end{pmatrix}.$$

両者の違いはハミルトニアンの中の ϕ の符号の $\pm$ であるので，最初の固有値問題が解ければ 2 番目も解ける．固有値はいずれの場合も

$$E_\pm = \pm\sqrt{\epsilon_p^2 + V^2|\phi|^2} \tag{4.246}$$

である．次にそれぞれの固有値 $E_\pm$ を与える固有ベクトルを求めよう．以下では結果のみを書くが，自ら計算して導出することを勧めたい．ϕ は $\phi = \phi^\dagger$ を満足する実数と仮定する．この仮定が自己無撞着であることは次節に進むとはっきりするだろう．

$$\begin{pmatrix}\alpha_\uparrow(\boldsymbol{p})\\ \alpha_\downarrow(-\boldsymbol{p})^\dagger\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\cos\theta_p & \sin\theta_p\\ -\sin\theta_p & \cos\theta_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_\uparrow(\boldsymbol{p})\\ \psi_\downarrow(-\boldsymbol{p})^\dagger\end{pmatrix}, \tag{4.247}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_\downarrow(\boldsymbol{p})\\ \alpha_\uparrow(-\boldsymbol{p})^\dagger\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\cos\theta_p & -\sin\theta_p\\ \sin\theta_p & \cos\theta_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_\downarrow(\boldsymbol{p})\\ \psi_\uparrow(-\boldsymbol{p})^\dagger\end{pmatrix} \tag{4.248}$$

で波動関数 α を導入すると，これらがエネルギー固有値 $E_\pm$ を持つ固有ベクトルとなる．即ち，

$$\hat{H}_{\uparrow p}\begin{pmatrix}\alpha_\uparrow(\boldsymbol{p})\\ \alpha_\downarrow(-\boldsymbol{p})^\dagger\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E_+ & 0\\ 0 & E_-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_\uparrow(\boldsymbol{p})\\ \alpha_\downarrow(-\boldsymbol{p})^\dagger\end{pmatrix}, \tag{4.249}$$

$$\hat{H}_{\downarrow p}\begin{pmatrix}\alpha_\downarrow(\boldsymbol{p})\\ \alpha_\uparrow(-\boldsymbol{p})^\dagger\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E_+ & 0\\ 0 & E_-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_\downarrow(\boldsymbol{p})\\ \alpha_\uparrow(-\boldsymbol{p})^\dagger\end{pmatrix}. \tag{4.250}$$

ここで θ_p は次のように決まる．

$$\tan 2\theta_p = \frac{V\phi}{\epsilon_p} = \frac{V\phi}{\boldsymbol{p}^2/2m},$$
$$\cos 2\theta_p = \frac{\epsilon_p}{\sqrt{\epsilon_p^2+(V\phi)^2}},\ \sin 2\theta_p = \frac{V\phi}{\sqrt{\epsilon_p^2+(V\phi)^2}}. \tag{4.251}$$

エネルギー固有状態を作るときに 2 つの波動関数を混合する角度 θ_p は，BCS

で用いられた記号 $h_p = h_k$ $(\hbar k = p)$ で表すと

$$h_k = \sin^2\theta_p \approx \left(\frac{V\phi}{2\epsilon_p}\right)^2,\ 1 - h_k = \cos^2\theta_p \approx 1 - \left(\frac{V\phi}{2\epsilon_p}\right)^2 \qquad (4.252)$$

となる．

エネルギー固有状態における波動関数の混合について補足する．固有状態では $\psi_\uparrow(\boldsymbol{p})$ と $\psi_\downarrow(-\boldsymbol{p})^\dagger$ が混じり合うかあるいは，$\psi_\downarrow(\boldsymbol{p})$ と $\psi_\uparrow(-\boldsymbol{p})^\dagger$ が混じり合うかのいずれかであった．その理由は慧眼な読者にはすでにお分かりとは思うが，相対論的に記述される系を説明した 4.4 節に戻ってみよう．そこではエネルギーに「+」と「−」の 2 つの解が現れた．この負 (−) のエネルギー状態にある粒子を理解するために，波動関数の複素共役（エルミート共役）を取って，それを反粒子の波動関数と解釈した．そうすると反粒子のエネルギーと運動量の符号は粒子と逆になり，電荷の正負も逆になることが分かった．今の場合は更にスピンも導入されているが，複素共役を取るとスピンの z 成分の $\pm$ が入れ替わることが理解できる．実際，4.3 節で説明したスピノールの回転を用いると $\begin{pmatrix} \psi\downarrow(x)^\dagger \\ -\psi\uparrow(x)^\dagger \end{pmatrix}$ がスピン $\frac{1}{2}$ の表現となることが分かる．注意深く計算すると下の成分に「−」が必要なことが分かる．この「−」が最初の 2 式における固有値問題と後の 2 式による固有値問題に符号の違いが現れる原因かもしれない．従ってスピンも含めて，負のエネルギーを持つ粒子の波動関数を (4.65) を拡張して，次のように反粒子の波動関数を用いて記述するすることができる．即ち

$$\psi_{\text{particle}}(t, \boldsymbol{x}; -|E|, \boldsymbol{p}, s_z = \pm\frac{1}{2}) = \psi_{\text{anti-particle}}(t, \boldsymbol{x}; |E|, -\boldsymbol{p}, s_z = \mp\frac{1}{2})^\dagger.$$

ここでの「負のエネルギー」とは，フェルミ・エネルギーをゼロとした場合の負である．通常はエネルギーが負の状態は全て電子で埋め尽くされている．しかしながら埋め尽くされた電子に「空き」が生じたらどうなるだろうか．負のエネルギーの電子が欠落しているのだからその分エネルギーはプラスになり，運動量も欠落しているのだから逆符号の運動量を持つことになり，スピンも欠落しているのだからアップとダウンを入れ替えたスピン状態になる考えることができる．つまりフェルミ・エネルギー以下のエネルギーを持つ電子が欠落している状態—「ホール（hole)」と呼ばれる状態—がここでいう「反粒子」である．従って，フェルミ・エネルギーよりも大きなエネルギーを持つ $\psi_\uparrow(\boldsymbol{p})$ で記述される「電子」とフェルミ・エネルギー以下の $\psi_\downarrow(-\boldsymbol{p})^\dagger$ で記述される「ホール」が混じり合うことは自然である．但しマイナスの電荷を持つ「電子」とマイナスの電子が欠落したプラスの電荷を持つ「ホール」が混合するのだから「電荷の保存則」が破れる．又ゲージ対称性も電荷の保存則を基にしているので破れる．この点を深刻に捉えて真っ正面から，電荷の保存則およびゲージ対称性の破れの問題に取り組んだのが南部陽一郎である．彼はこの電荷の保存則

およびゲージ対称性の破れが如何にして起こるかを理解して「対称性の自発的破れ」という概念に到達した．これは次節で考察する．

BCS 理論として残された問題は，温度 T の熱浴に浸した金属が超伝導を発現する臨界温度 T_c を求める問題である．BCS 理論では，有限温度の場合は分配函数を作るために，エネルギー E に加えて温度とエントロピー S の積 $-TS$ を直接計算する．これを平均値 $\phi = \langle \Psi(x,x) \rangle = \langle \psi(x)\psi(x) \rangle$ の有限温度での評価と考えれば導出することは可能であろうが，ここでは触れずにおこう．

ここでは南部風に BCS 理論をディラック方程式の形に書き直すことにしよう．4 成分の波動関数 $\psi_{BCS}(x)$ を以下のように導入する．

$$\psi_{BCS}(x) = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(x) \\ \psi_\downarrow(x) \\ \psi_\downarrow(x)^\dagger \\ -\psi_\uparrow(x)^\dagger \end{pmatrix}. \tag{4.253}$$

最後の成分にマイナスを付けたのは，3 番目と 4 番目成分がスピンのアップとダウンの働きをさせるためである．このとき ϕ を上で行ったように実数と仮定しないで元の複素数に戻しておく．ϕ の虚数部分は次節で明らかになるように重要な働きをするからである．このとき BCS 理論の波動関数が満たす 4 つの方程式は

$$\left\{ i\hbar\partial_t - \gamma_5 \frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2}{2m} + V \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \phi^\dagger & 0 \end{pmatrix} \right\} \psi_{BCS}(x) = 0 \tag{4.254}$$

とまとめられる．ここで $\phi(x)$ の実部と虚部を，2 つの場 $\sigma(x)$ と $\pi(x)$ として導入しよう．

$$\sigma(x) \equiv \overline{\psi}(x)\psi(x),\ \pi(x) \equiv -i\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x), \tag{4.255}$$

$$\phi(x) \equiv \sigma(x) + i\pi(x). \tag{4.256}$$

この $\sigma(x)$ と $\pi(x)$ は，南部理論によれば σ 中間子と π 中間子に相当するのでそう名付けた．南部理論では $\psi(x)$ は「核子 (nucleon)」即ち陽子あるいは中性子を表す．そして核子 ψ と反核子 $\overline{\psi}$ の複合粒子として σ 中間子や π 中間子が現れる．現代風に言うと，ψ は何種類かの「クォーク (quark)」q_i $(i = 1, \ldots, f)$ である．そしてクォークと反クォークの複合状態として σ 中間子 $\sigma_{\bar{i}j} = \overline{q}_i q_j$ や π 中間子 $\pi_{\bar{i}j} = -i\overline{q}_i\gamma_5 q_j$ が現れる．

再び議論に戻ると，ハートリー–フォック近似での期待値は

$$\sigma = \langle \overline{\psi}(x)\psi(x) \rangle,\ \pi = -i\langle \overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) \rangle, \tag{4.257}$$

$$\phi = \sigma + i\pi \tag{4.258}$$

となる．BCS の作用をなるだけディラック方程式に近い形で，4 成分の波動関数 $\psi(x)$ で書くと

$$
\begin{aligned}
S_{BCS} = &\int d^4x\ \overline{\psi}_{BCS}(x)\left(i\hbar\gamma^0\partial_0 - \gamma^0\gamma_5\frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2}{2mc}\right)\psi_{BCS}(x) \\
&-\frac{V}{2c}\int d^4x\left[\left(\overline{\psi}_{BCS}(x)\psi_{BCS}(x)\right)\left(\overline{\psi}_{BCS}(x)\psi_{BCS}(x)\right)\right. \\
&\qquad\left.-\left(\overline{\psi}_{BCS}(x)\gamma_5\psi_{BCS}(x)\right)\left(\overline{\psi}_{BCS}(x)\gamma_5\psi_{BCS}(x)\right)\right] \qquad (4.259) \\
= &\int d^4x\ \overline{\psi}_{BCS}(x)\left(i\hbar\gamma^0\partial_0 - \gamma^0\gamma_5\frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2}{2mc}\right)\psi_{BCS}(x) \\
&-\frac{V}{c}\int d^4x\ \overline{\psi}_{BCS}(x)(\sigma(x) - i\gamma_5\pi(x))\psi_{BCS}(x) \qquad (4.260)
\end{aligned}
$$

となる．これをディラック方程式 (4.172) およびディラックの作用 S_R(4.171) と比較されたい．相互作用の形は次の等式から理解できる．即ち

$$
\begin{aligned}
&\psi(x)_\downarrow^\dagger\psi_\uparrow(x)^\dagger\psi_\uparrow(x)\psi_\downarrow(x) \\
&= \frac{1}{8}\left[\left(\overline{\psi}_{BCS}(x)\psi_{BCS}(x)\right)^2 - \left(\overline{\psi}_{BCS}(x)\gamma_5\psi_{BCS}(x)\right)^2\right]. \qquad (4.261)
\end{aligned}
$$

この等式をチェックすることを勧めたい．これから超伝導におけるフォノン交換による電子間相互作用は，次節で述べる南部理論の相互作用とまったく同じ形に書くことができた．これで次に進む準備が整った．

最後に一つコメントをする．南部が超伝導を考察した論文[8]で用いた波動関数は，上記のような 4 成分の波動関数ではなく次の 2 成分の波動関数であった．即ち

$$
\psi_{BCS}^{Nambu}(x) = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(x) \\ \psi_\downarrow(x)^\dagger \end{pmatrix}. \qquad (4.262)
$$

この場合には

$$
\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (4.263)
$$

が粒子数を与える行列となり我々の γ_5 に相当する．2 成分の場合には $\psi_{BCS}^{Nambu}(x)$ とその正準運動量 $\overline{\psi}_{BCS}^{Nambu}(x)$ で 4 つの自由度を表す．我々の場合は波動関数が 4 成分であるので，場と正準運動量の間で自由度が重複している可能性もある．もしも重複しているならばスピノールを実数と考えてマヨラナスピノールとするか，あるいはホールの波動関数はもともと電子の波動関数の単なる複素共役ではなく，電子と独立の波動関数（ディラックの立場）と考えるならば 4 成分としてもよいだろう．BCS 理論を 4 成分の波動関数として表した我々の上記の記述は新しい方法であるかもしれない．

4.6 スピン 1/2 粒子の質量—カイラル対称性の破れと南部理論 (1960)

この節では自発的対称性の破れに関する南部理論を紹介する．南部陽一郎は

BCS 理論が発表された 1957 年からの 2 年間，BCS 理論に内在する重要な問題，即ち電荷の保存則（あるいは粒子数保存則）が一見破れているように見えるが，どのよう考えたらこれを矛盾なく理解できるのかに集中した．その間色々な人が色々な方法で BCS 理論を発展させて行ったが，南部はそれを気にすることなくひたすら BCS 理論を「自己流に書き直す」ことに徹した (1959)[8]．近くにいたシュリーファーから多くのことを学んだ．その結果，前節の最後で我々にも理解できたように，BCS 理論とディラック方程式の間に緊密な対応関係が存在することを明確に認識したのである．

さてフェルミオンの質量問題を考えよう．このときディラックの波動関数を式 (4.176) のように，右利きの場 $\psi(x)_R$ と左利きの場 $\psi(x)_L$ に分解することが重要である．

$$\psi_{Dirac}(x) = \begin{pmatrix} \psi(x)_R \\ \psi(x)_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(x)_R \\ \psi_\downarrow(x)_R \\ \psi_\uparrow(x)_L \\ \psi_\downarrow(x)_L \end{pmatrix} \tag{4.264}$$

である．BCS 理論の波動関数 $\psi_{BCS}(x)$ では，上 2 成分が粒子のスピン・アップとダウンであり，下 2 成分が反粒子のスピン・アップとダウンである．これに対してディラックの 4 成分波動関数では，上 2 成分は右利き（Right-handed）場のスピン・アップとダウンであり，下 2 成分は左利き（Left-handed）場のスピン・アップとダウンである．粒子数 N を，粒子に対して $+1$ 反粒子に対して -1 と決めるのが通例である．一方右利きと左利きを区別する演算子は「カイラリティー演算子」であり，γ_5 である．γ_5 の固有値が $+1$ であるとき右利き，γ_5 の固有値が -1 であるとき左利きと決めていた．従って「粒子数」の役割を「カイラリティー」に担わせることにすれば，超伝導においてノーマルな状態の $\phi = 0$ からスーパーな状態 $\phi \neq 0$ が得られるのと同じように，ディラック方程式に従うスピン 1/2 の粒子の質量 m も，ノーマルな状態では 0 であったとしてもスーパーな状態（超伝導状態）になれば $m \neq 0$ となることが期待できる．これが南部によるフェルミオンの質量を生成する機構である．これを「カイラル対称性（chiral symmetry）」の自発的破れによってフェルミオンの質量が生じるという．

カイラリティーで分解したディラック方程式は

$$(E - c(\boldsymbol{\sigma p}))\,\psi_R(\boldsymbol{p}) = mc^2\psi_L(\boldsymbol{p}), \tag{4.265}$$

$$(E + c(\boldsymbol{\sigma p}))\,\psi_R(\boldsymbol{p}) = mc^2\psi_R(\boldsymbol{p}) \tag{4.266}$$

であり，エネルギー固有値は $E = E_\pm = \pm\sqrt{c^2\boldsymbol{p}^2 + mc^2}$ であることもすでに知っている．つまりフェルミオンが質量を持つためには，超伝導では粒子と反粒子が混じり合ったけれども，ここでは $\psi_R(\boldsymbol{p})$ と $\psi_L(\boldsymbol{p})$ が混じり合うことに

なる．対称性を式で書いておこう．粒子数の保存則は

$$\psi(x) \Rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta}\psi(x),\ \psi(x)^\dagger \Rightarrow \psi'(x)^\dagger = e^{-i\theta}\psi(x)^\dagger \tag{4.267}$$

という U(1) 変換に対して作用が不変となることである．これは電荷の保存則と密接に関係している．電荷の保存則は，$\psi(x)$ を電子の波動関数とすると

$$\psi(x) \Rightarrow \psi'(x) = e^{\frac{-ie_0}{\hbar c}\theta}\psi(x),\ \psi(x)^\dagger \Rightarrow \psi'(x)^\dagger = e^{\frac{ie_0}{\hbar c}\theta}\psi(x)^\dagger, \tag{4.268}$$

の変換に対して作用が不変であることを言い換えたものである．変換パラメータ θ を時空の座標 x に依存させると U(1) ゲージ理論となる．電子は電荷を持っているので電磁場と相互作用する．従ってゲージ理論である．電荷の保存則が破れるとこの U(1) 対称性も破れるがゲージ対称性はどうなるのだろうか．実際ギンツブルグ–ランダウが導入した場 $\Psi_{GL}(x)$ は，BCS 理論によればクーパーペアの波動関数 $\psi_\uparrow(x)\psi_\downarrow(x)$ である．従って電荷 $Q = -2e_0$ の場としてゲージ変換される．$\Psi_{GL}(x)$ がゼロでない期待値 $\langle\Psi_{GL}(x)\rangle = \text{const.} \neq 0$ を持つと，ゲージ対称性が自発的に破れて電磁場が質量を持つことはすでに見た．

一方カイラル変換は

$$\psi_R(x) \Rightarrow \psi_R(x)' = e^{i\theta_5}\psi_R(x),\ \psi_L(x) \Rightarrow \psi_L(x)' = e^{-i\theta_5}\psi_L(x),\ \text{and}$$
$$\psi(x) \Rightarrow \psi(x)' = e^{i\gamma_5\theta_5}\psi(x)\ \text{in general} \tag{4.269}$$

であり，カイラル対称性を持つ理論から出発して，自発的にその対称性を破ってフェルミオンの質量を出すことを考える．先ずカイラル対称性を持つスピン 1/2 の場の理論を作る必要があるが，南部 (1960) が与えた作用は以下のものである[9]．本論文は Nambu と Jona-Lasinio (1961) で書かれたので，NJL 模型と言われている[10]．

$$S_{NJL} = \int d^4x\ \overline{\psi}(x)(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu)\psi(x) \tag{4.270}$$
$$-g\int d^4x\ \left[(\overline{\psi}(x)\psi(x))(\overline{\psi}(x)\psi(x)) - (\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x))(\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x))\right].$$

右利き場と左利き場のカイラル変換を用いると次のことが分かる．

$$\begin{pmatrix} \overline{\psi}\psi \\ i\overline{\psi}\gamma_5\psi \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos 2\theta_5 & \sin 2\theta_5 \\ -\sin 2\theta_5 & \cos 2\theta_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\psi}\psi \\ i\overline{\psi}\gamma_5\psi \end{pmatrix}. \tag{4.271}$$

従って相互作用項 $(\overline{\psi}\psi)^2 - (\overline{\psi}\gamma_5\psi)^2$ はカイラル変換不変である．この相互作用の形がカイラル変換不変性から導かれた NJL 模型の相互作用であるが，超伝導の相互作用も同じ形に書けていた．同じようにして $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ もカイラル変換不変であることを示すことができる．そのためには $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi = \overline{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R + \overline{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L$ が分かればよい．これによって作用における運動項（微分の入った項）もカイラル不変となる．もしも作用にフェルミオンの質量項 $mc(\overline{\psi}\psi)$ が存在すると，この項はカイラル変換で不変でないので，作用全体がカイラル不変でなくな

る．カイラル対称性とはフェルミオンの質量がゼロであることを保証する対称性である．相互作用に関して実は

$$\frac{i}{\hbar}S_I = \frac{i}{\hbar}(-g)\int d^4x\left[(\overline{\psi}\psi)^2 - (\overline{\psi}\gamma_5\psi)^2\right] \tag{4.272}$$

$$= \frac{i}{2\hbar}(-g)\int d^4x\left[(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi)(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi) - (\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi)\right] \tag{4.273}$$

という等式（一般にこういった等式を「フィルツの等式（Fierz identity）」という）が成り立っている[11]．右辺から相互作用がカイラル不変であることは自明である．更に重要なのは，この 4 体フェルミ相互作用を電磁場等ゲージ場を交換して導出することも可能な点である．BCS 理論では電子間のフォノン交換によって引力を導いた．ゲージ理論によれば，物質と電磁場との相互作用は，物質の運動量（演算子）をゲージ場を含むものに置き換えることで導入されることは幾度も述べた．即ち

$$\hat{p}_\mu = i\hbar\partial_\mu \Rightarrow \hat{p}_\mu - \frac{Q}{c}A_\mu(x) = i\hbar\partial_\mu - \frac{Q}{c}A_\mu(x) \tag{4.274}$$

なのでフェルミオンと電磁場との相互作用は

$$S_{EM} = -\frac{Q}{c}\int d^4x\ \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) \tag{4.275}$$

となる．従ってフォノン交換で行った方法を適用すれば，ゲージ場を媒介して $(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi)(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)$ タイプの相互作用を得ることができる．もう一度フィルツの等式を見てみよう．ここでフェルミオンの積が 4 種類現れる．即ち $\overline{\psi}\psi$，$\overline{\psi}\gamma_5\psi$，$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$，$\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ の 4 つである．これらをスカラー（S），擬スカラー（pseudo scalar）（P），ベクトル（V），軸性ベクトル（axial vector）（A）と呼ぶ．S と V がスカラーとベクトルの変換をすることはすでに説明したが，P と A は説明していなかった．簡単に補足する．「パリティ変換あるいは空間反転（Parity transformation）」$\mathcal{P}$ を施したとき，即ち $\boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}$ としたときディラック方程式が同じ方程式になるためには

$$\mathcal{P}:\ \psi(t,\boldsymbol{x}) \Rightarrow \psi(t,\boldsymbol{x})^{\mathcal{P}} = \gamma^0\psi(t,-\boldsymbol{x}) \tag{4.276}$$

としなければならない．これから

$$(\overline{\psi}\psi)^{\mathcal{P}} = \overline{\psi}\psi,\ (\overline{\psi}\gamma_5\psi)^{\mathcal{P}} = -\overline{\psi}\gamma_5\psi, \tag{4.277}$$

$$(\overline{\psi}\gamma^0\psi)^{\mathcal{P}} = \overline{\psi}\gamma^0\psi,\ (\overline{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi)^{\mathcal{P}} = -\overline{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi, \tag{4.278}$$

$$(\overline{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi)^{\mathcal{P}} = -\overline{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi,\ (\overline{\psi}\boldsymbol{\gamma}\gamma_5\psi)^{\mathcal{P}} = \overline{\psi}\boldsymbol{\gamma}\gamma_5\psi \tag{4.279}$$

となり，P と A はローレンツ変換においては S と V と同じ変換をするが，パリティ変換を施すときには S と V に比べて符号が異なる．相互作用における 4 つのタイプを S, P, V, A と呼ぶことにしよう．

前節の最後に BCS の作用をディラックに近い形で書いた作用を見てみよう．

ここで用いた波動関数では上 2 成分が粒子であり，下 2 成分がホール（反粒子）であった．従って粒子数を表す演算子 N は γ_5 と同一であり，粒子数に対する対称性は γ_5 を用いる「カイラル対称性」と同一である．従って粒子数保存則を満たす BCS 理論の相互作用が，南部理論の相互作用と同じ形に書けることが理解できる．2 つの理論の相違点は運動項のみである．BCS 理論の運動項が「カイラル対称性」で不変であることは容易に理解できる．つまり南部風に理解するならば，BCS 理論は非相対論なのでもちろん運動項は質量ゼロのディラックの運動項とは異なるけれどもそれ以外は同一の理論である．もちろん粒子数をカイラリティで置き換える必要があるので物理的な意味付けは両者で異なる．従って物理的意味付けの違いを理解しておくならば，南部理論は超伝導の理解に対してとても有益である．これはいわば南部が 50 年以上前にたどった道筋を逆の順序でたどることに相当する．

さてフェルミオンの質量 m は $\sigma \neq 0$ であるが $\pi = 0$ であると仮定するならば，

$$mc = 2g\sigma, \text{ where } \sigma = \langle\sigma(x)\rangle = \langle\overline{\psi}(x)\psi(x)\rangle \tag{4.280}$$

である．ハートリー–フォック近似を用いるので，この仮定のもとで期待値 $\langle\overline{\psi}(x)\psi(x)\rangle$ と $\langle\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\rangle$ を計算して，整合性が取れた解を求めることになる．つまりフェルミオンが質量 m を持つと仮定して計算を行い，計算終了後にこの仮定が正しいことを確認するという方法である．カイラル不変な理論では通常フェルミオンは質量を持たないにも関わらず，質量ゼロのフェルミオンを用いて計算するのでないことを強調しておく．これがハートリー–フォック近似の神髄である．次に $\langle\overline{\psi}(x)\psi(x)\rangle$ と $\langle\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\rangle$ の計算方法を説明する．もう一度 (4.82) (4.83) に戻ってみよう．そこで述べた方法は量子補正（揺らぎ）あるいは統計的揺らぎを計算する方法であった．ここでそれを使う．今は粒子がフェルミオンなので，$j(x)$ の代わりに $\overline{\psi}(x)$ と $\psi(x)$ のソース（源）として $\eta(x)$ と $\overline{\eta}(x)$ を導入すると，ソースを導入した質量 m のフェルミオンの分配関数は

$$\begin{aligned} Z[\eta,\overline{\eta}] &= \int \mathcal{D}\psi(x)\mathcal{D}\overline{\psi}(x) e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ \left(\overline{\psi}(x)\hat{A}_D\psi(x) - \overline{\eta}(x)\psi(x) - \overline{\psi}(x)\eta(x)\right)}, \\ &\text{where}\ \ \hat{A}_D = i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc \end{aligned} \tag{4.281}$$

となる．

このとき期待値 $\langle\psi(x)_i\overline{\psi}(y)_j\rangle$ は次のように計算される．

$$\begin{aligned} \langle\psi(x)_i\overline{\psi}(y)_j\rangle &= \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\psi(x)\mathcal{D}\overline{\psi}(x)\ \left(\psi(x)_i\overline{\psi}(y)_j\right)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ \left(\overline{\psi}(x)\hat{A}_D\psi(x)\right)} \\ &= \left(-i\hbar\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x)_i} i\hbar\frac{\delta}{\delta\eta(y)_j}\right)\ln Z[\eta,\overline{\eta}]|_{\eta=0,\overline{\eta}=0} \\ &= \left(-i\hbar\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x)_i} i\hbar\frac{\delta}{\delta\eta(y)_j}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\int d^4u\left(\overline{\eta}(u)(\hat{A}_D)^{-1}\eta(u)\right)}|_{\eta=0,\ \overline{\eta}=0} \end{aligned} \tag{4.282}$$

$$= i\hbar\, \hat{A}_D^{-1}(x-y)_{ij} \equiv S_F(x-y)_{ij}. \tag{4.283}$$

結果はボソンの場合と同じである．但しフェルミオンは反交換する場なので演算する場所に移動する間に別のフェルミオン場を飛び越して符号を変える可能性があるので，演算に当たっては細心の注意が必要である．なおフェルミオン変数*4)に対するガウス積分は

$$\int \mathcal{D}\psi(x)\mathcal{D}\overline{\psi}(x)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ \left(\overline{\psi}(x)\hat{A}_D\psi(x)\right)} \propto \det \hat{A}_D \tag{4.284}$$

であり，複素数のボソン変数に対するガウス積分の

$$\int \mathcal{D}\phi(x)\mathcal{D}\phi(x)^\dagger\ e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ \left(\phi(x)^\dagger\hat{A}\phi(x)\right)} \propto (\det \hat{A})^{-1} \tag{4.285}$$

と異なることにも注意が必要である．複素数のガウス積分には，実部と虚部の積分があるので実数のガウス積分の二乗である．しかしながら上で行ったような通常の計算では，この $\det \hat{A}$ の因子は分母子で消えるので，グラスマンであろうが複素数であろうが答えに影響しない．グラスマン変数による積分は微分と同じであるが，詳細に関しては例えば坂本眞人著「量子力学から超対称性へ」[12]の 7.3 節「グラスマン数とその性質」を参照されたい．

元に戻るとディラック方程式に現れる演算子 $\hat{A}_D$ の逆演算子を求める必要がある．式で書くと

$$(\hat{A}_D)_{ij}S_F(x-y)_{jk} = i\hbar\delta_{ik}\delta^{(4)}(x-y) \tag{4.286}$$

を満たす $S_F(x-y)$ を求める問題である．この $S_F(x-y)$ をフェルミオンの「伝搬関数（propagator）」という．フォノンの伝搬関数をすでに導出したので，ここは答えを書くだけで済ませよう．もちろん自分で導出することを勧めるが難しくない．答えは

$$S_F(x-y)_{ij} = i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{(k_\mu\gamma^\mu + mc/\hbar)_{ij}}{k_\mu k^\mu - (mc/\hbar)^2} e^{-ik_\mu x^\mu} \tag{4.287}$$

である．これを使うと

$$\sigma = \langle\overline{\psi}(x)\psi(x)\rangle = -\sum_{i=1}^{4}\langle\psi(x)_i\overline{\psi}(x)_i\rangle \tag{4.288}$$

$$= -i\sum_{i=1}^{4}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{(k_\mu\gamma^\mu + mc/\hbar)_{ii}}{k^2 - (mc/\hbar)^2} \tag{4.289}$$

$$= -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{4mc/\hbar}{k^2 - (mc/\hbar)^2} \tag{4.290}$$

となる．但し $k_\mu k^\mu \equiv k^2$ と書いた．

一方，

*4) 数学では「グラスマン変数（Grassman variable）」と呼ぶ．

$$\pi = \langle \overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\rangle = -\sum_{i,j=1}^{4} \langle (\gamma_5)_{ij}\psi(x)_j\overline{\psi}(x)_i\rangle \tag{4.291}$$

$$= -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{Tr\left[\gamma_5(k_\mu\gamma^\mu + mc/\hbar)\right]}{k^2-(mc/\hbar)^2} = 0, \tag{4.292}$$

π がゼロとなるのは行列のトレース $\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma^\mu) = \mathrm{Tr}(\gamma_5) = 0$ が全部ゼロだからである．

次に σ がフェルミオンの質量を与える $(mc = 2g\sigma)$ ことを思い出すと

$$mc = -8gi\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{mc/\hbar}{k^2-(m/\hbar)^2}. \tag{4.293}$$

これには 2 つ解がある．一つは $m = 0$ である．もう一つの解は $m \neq 0$ の場合であるが，両辺を mc で割ると

$$1 = -\frac{8ig}{\hbar}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{1}{k^2-(mc/\hbar)^2} \tag{4.294}$$

となるので，これから m を求めることができる．k^0 積分を先ず実行するがそのとき，分母の極（pole）の位置が重要となる．そのため $m \Rightarrow m - i\epsilon$ と置き換える処方箋が用いられる．ϵ は極く小さな正の数という意味であるので係数は気にしない．つまり $\epsilon = 2m\epsilon = \cdots$ と考える．このように定義されたプロパゲーターをファインマンのプロパゲーターと呼ぶ．ボソンの場合でもフェルミオンの場合でもこの置き換えをすると経路積分に余分の因子が掛かる．その因子は

$$e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ -(-i\epsilon 2m)\left(\frac{c}{\hbar}\right)^2\phi(x)^\dagger\phi(x)} = e^{-\frac{2m\epsilon}{\hbar}\left(\frac{c}{\hbar}\right)^2\int d^4x\ \phi(x)^\dagger\phi(x)},\ \text{or}$$
$$e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ -(-i\epsilon)c\overline{\psi}(x)\psi(x)} = e^{-\frac{\epsilon c}{\hbar}\int d^4x\ \overline{\psi}(x)\psi(x)}. \tag{4.295}$$

経路積分を無限遠で指数関数的に小さくする働きをするので，経路積分が発散しなくなる．これはウィック回転するときに特異点を避けるための処方箋とも関係している．

このようにすると k^0 積分が留数定理を用いて実行できて

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2+i\epsilon} = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}}$$
$$= \left(\frac{mc}{2\pi\hbar}\right)^2\int_0^{\frac{\hbar\omega_D}{mc^2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \left(\frac{mc}{2\pi\hbar}\right)^2\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right]_0^{\frac{\hbar\omega_D}{mc^2}}. \tag{4.296}$$

ここで波数ベクトル積分における最大値を，超伝導の場合にならって同じ記号 ω_D を用いて表して，それより大きな波数ベクトルによる積分をカットオフ（cutoff）した．即ち

$$c|\boldsymbol{k}| \leq \omega_D. \tag{4.297}$$

カットオフは大きいので $\hbar\omega_D \gg mc^2$ と近似すると

$$1 + \frac{\pi^2\hbar}{g\left(\frac{\omega_D}{c}\right)^2} = \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega_D}\right)^2 \ln\left(\frac{\hbar\omega_D}{mc^2}\right) \tag{4.298}$$

となる．右辺に現れた関数 $f(x) = x^2\ln(1/x)$ は $f(x) \leq 1/2e = 0.1839\cdots$ である．従って斥力 $(g \geq 0)$ には解がない．解があるのは引力 $(g < 0)$ のときで，結合定数の大きさ $|g|$ が

$$\frac{\pi^2\hbar}{|g|\left(\frac{\omega_D}{c}\right)^2} \geq 0.816\cdots \tag{4.299}$$

を満たす場合である．

同じ方法を BCS 理論に適用してみよう．この場合 $\langle\overline{\psi}(x)\psi(x)\rangle = \sigma \neq 0$ と $\langle\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\rangle = \pi = 0$ をあとで確かめるとして仮定すれば，$\hat{A}_{BCS}$ は

$$\hat{A}_{BCS} = i\hbar\gamma^0\partial_0 - \gamma^0\gamma_5\frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2}{2mc} - \frac{V}{c}\sigma \tag{4.300}$$

となる．$\hat{A}_D$ と比較されたい．そうするとプロパゲーターは非相対論的な運動エネルギー $\epsilon_k = (\hbar\boldsymbol{k})^2/2m$ を用いて

$$S_F^{BCS}(x-y)_{ij} = i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{(k_0\gamma^0 - \frac{\epsilon_k}{\hbar c}\gamma^0\gamma_5 + \frac{V\sigma}{\hbar c})_{ij}}{(k^0)^2 - \left(\frac{\epsilon_k}{\hbar c}\right)^2 - \left(\frac{V\sigma}{\hbar c}\right)^2 + i\epsilon}\ e^{-ik_\mu x^\mu}$$

となり，従って

$$\sigma = \langle\overline{\psi}(x)\psi(x)\rangle = -\mathrm{Tr}\left(S_F^{BCS}(0)\right) \tag{4.301}$$

$$= -i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{\mathrm{Tr}\left(k_0\gamma^0 - \frac{\epsilon_k}{\hbar c}\gamma^0\gamma_5 + \frac{V\sigma}{\hbar c}\right)}{(k^0)^2 - \left(\frac{\epsilon_k}{\hbar c}\right)^2 - \left(\frac{V\sigma}{\hbar c}\right)^2 + i\epsilon} \tag{4.302}$$

$$= \left(\frac{V\sigma}{\hbar c}\right)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{i\ \mathrm{Tr}1}{(k^0)^2 - \left(\frac{\epsilon_k}{\hbar c}\right)^2 - \left(\frac{V\sigma}{\hbar c}\right)^2 + i\epsilon} \tag{4.303}$$

$$= V\sigma\int\frac{d^3k}{2(2\pi)^3}\frac{4}{\sqrt{(\epsilon_k)^2 + (V\sigma)^2}} \tag{4.304}$$

となる．さてこの積分のやり方が南部理論と BCS 理論では異なる．BCS 理論の場合には $k = |\boldsymbol{k}|$ 積分をそのまま実行するが，BCS 理論では関係する電子はフェルミエネルギー ϵ_F の近辺にある電子やホールである．従って前節でやったように，$k = |\boldsymbol{k}|$ 積分を状態数密度 $\rho(\epsilon)$ をかけたエネルギー積分に変換し，状態数密度をフェルミエネルギーにおける（フェルミ面上の）値 $\rho \approx \rho_F$ に置き換えることにする．但しここで用いた波動関数は 4 成分であり，電子のスピンアップ・ダウンおよびホールのスピンアップ・ダウンに相当することを考慮しなければならない．Tr1 がそれを表している．従って Tr1 を除いた部分は一成分の寄与であるので，その状態数を関与する電子の状態数の 1/4 とした．さて上の式で $\sigma \neq 0$ の解は，両辺を σ で割った後に以下のように計算される．

$$\frac{2}{V} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4}{\sqrt{(\epsilon_k)^2 + (V\sigma)^2}} = \int \frac{\rho(\epsilon)d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + (V\sigma)^2}}$$
$$\approx \rho_F \int \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + (V\sigma)^2}}. \tag{4.305}$$

これは簡単に積分できる．

$$\frac{2}{\rho_F V} \approx \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + (V\sigma)^2}} = \int_{-\frac{\hbar\omega_D}{|V\sigma|}}^{\frac{\hbar\omega_D}{|V\sigma|}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= 2\left[\ln|x + \sqrt{x^2-1}|\right]_0^{\frac{\hbar\omega_D}{|V\sigma|}} \approx 2\ln\left(\frac{2\hbar\omega_D}{|V\sigma|}\right). \tag{4.306}$$

これから次の関係が得られる．

$$|V\sigma| = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{\rho_F V}}. \tag{4.307}$$

BCS 理論の運動方程式からフェルミ面上 ($\epsilon_k = 0$) でのエネルギー固有値が $\pm|V\sigma|$ であることが分かる．この大きさがエネルギーギャップ Δ である．従って，

$$\Delta = |V\sigma| = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{\rho_F V}} \tag{4.308}$$

が得られるが，これは前節でクーパーペアの波動関数を用いて求めた超伝導のエネルギーギャップの式 (4.222) と一致する．

4.7 南部理論つづき：自発的対称性の破れと南部–ゴールドストーンボソンの役割

対称性は作用を不変とする変換で記述されるが，物理量の保存則と関係する．従って保存則とは何かから始める．先ず電荷の保存則 (4.15) を思い出そう．もう一度書くと，マクスウェルの方程式の両辺を微分すると次の式が得られる．即ち

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla j}\right) = 0. \tag{4.309}$$

単位体積辺りの電荷密度 ρ の時間変化は，その部分を取り囲む面を通して，単位面積当たり単位時間に流れ込む電流 $\boldsymbol{j}$ によって補われるという式である．電荷の移動はあるが，消滅したり生成したりはしないということだから電荷は保存している．$j^\mu(x)$ を「カレント（流れ，current)」と呼び，上記の保存則を「カレントの保存（current conservation)」ともいう．スピン 1/2 の粒子のカレントを (4.173) 式で与えたが，そのときはそれが反変ベクトルの変換をすることを示しただけで，保存するものは何かについては議論しなかった．そこで与えたカレントは

$$j^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{4.310}$$

である．このカレントの意味を理解するためにスピン 1/2 の粒子を電磁場と相互作用させてみよう．電荷密度と電流密度を合わせた「電磁カレント (electromagnetic current)」はこの相互作用の形から読み取れる．即ち電磁カレントは作用に

$$\frac{1}{c}\int d^4x\ j^\mu(x)A_\mu(x) \tag{4.311}$$

の形で現れる．そうするとマクスウェル方程式の右辺に「電磁カレント (electromagnetic current)」が正しい位置に現れる．従ってスピン 1/2 の粒子が作る電磁カレントは

$$j^\mu(x)_{EM} = Q\ \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{4.312}$$

である．このカレントが保存することを，ディラック方程式を用いて確認しておこう．保存則とは，保存する電荷の時間発展を追うものだから，確認するには運動方程式を使う必要がある．先ず $j^0(x)$ であるが，4 成分に分解すると

$$\begin{aligned} j^0(x)_{EM} \ &= Q\left(\psi_{R\uparrow}(x)^\dagger\psi_{R\uparrow}(x) + \psi_{R\downarrow}(x)^\dagger\psi_{R\downarrow}(x) + \psi_{L\uparrow}(x)^\dagger\psi_{L\uparrow}(x)\right. \\ &\quad + \left.\ \psi_{L\downarrow}(x)^\dagger\psi_{L\downarrow}(x)\right) \end{aligned} \tag{4.313}$$

である．波動関数の絶対値の二乗 $|\psi|^2$ は単位体積当たりの存在確率を表すと考えると，確率 1 で粒子が 1 個存在することになるので，$|\psi|^2$ はその粒子の数密度と考えられる．電荷 Q を持つ粒子が 4 種類あるのだから，$j^0(x)_{EM}$ は電荷密度となる．次に電荷密度の時間変化を考えると電流密度が得られる．時間変化はディラック方程式で記述されるので，

$$\begin{aligned} \partial_0 j^0 &= (\partial_0\psi)^\dagger\psi + \psi^\dagger\left(\partial_0\psi\right) \\ &= \left(\gamma^0\left(-\gamma^i\partial_i + \frac{1}{i\hbar}mc\right)\psi\right)^\dagger\psi + \psi^\dagger\gamma^0\left(-\gamma^i\partial_i + \frac{1}{i\hbar}mc\right)\psi \\ &= -(\partial_i\psi)^\dagger\gamma^{i\dagger}\gamma^0\psi - \psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi = -\partial_i j^i(x) \end{aligned} \tag{4.314}$$

として示すことができる．但しここで $\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$ と $\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^i$ を使った．この経験からカイラルカレント $j_5^\mu(x)$ を次のように与える．

$$j_5^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x). \tag{4.315}$$

これがどんな荷電のカレントを表すかは $j_5^0(x)$ を見れば分かる．実際

$$j^0 = \psi^\dagger\gamma_5\psi = \psi_{R\uparrow}^\dagger\psi_{R\uparrow} + \psi_{R\downarrow}^\dagger\psi_{R\downarrow} - \psi_{L\uparrow}^\dagger\psi_{L\uparrow} - \psi_{L\downarrow}^\dagger\psi_{L\downarrow} \tag{4.316}$$

であるので，単位体積当たりのカイラリティ密度を与えている．カイラリティを「カイラル荷電 (chiral charge)」と呼んでもよいだろう．このカイラル荷電

が保存するかどうかをチェックしよう．ディラック方程式を用いると

$$\partial_0 j_5^0 = (\partial_0\psi)^\dagger\gamma_5\psi + \psi^\dagger\gamma_5\left(\partial_0\psi\right)$$
$$= \left\{\gamma^0\left(-\gamma^i\partial_i + \frac{1}{i\hbar}mc\right)\psi\right\}^\dagger\gamma_5\psi + \psi^\dagger\gamma_5\gamma^0\left(-\gamma^i\partial_i + \frac{1}{i\hbar}mc\right)\psi$$
$$= -(\partial_i\psi)^\dagger\gamma^{i\dagger}\gamma^0\gamma_5\psi - \psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\gamma_5\partial_i\psi + \frac{2imc}{\hbar}\,\overline{\psi}\gamma_5\psi \tag{4.317}$$
$$= -\partial_i j_5^i(x) + i\,\frac{2mc}{\hbar}\,\overline{\psi}\gamma_5\psi \tag{4.318}$$

となる．即ち

$$-\partial_\mu j_5^\mu(x) = \frac{2mc}{i\hbar}\,\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) \equiv \frac{2mc}{i\hbar}\,j_5(x). \tag{4.319}$$

この右辺の $j_5(x)$ は，π 中間子の場 $\pi(x)$ と密接に関係している．これまで $\pi(x)$ は $\sigma(x)$ に比して目立った働きをしていなかった．$\sigma(x)$ は $\langle\sigma(x)\rangle = \sigma \neq 0$ となって期待値を持つことによって，エネルギーギャップやフェルミオン質量の生成に寄与したのに対し，$\pi(x)$ の方は $\langle\pi(x)\rangle = \pi = 0$ だったので目立たなかった．しかしながら対称性の破れと密接に関係する保存則の破れは，この π 中間子によって与えられる．対称性の自発的破れが起きると，この $\pi(x)$ が「南部–ゴールドストーンボソン（Nambu-Goldstone boson）」と呼ばれる質量ゼロの粒子として出現し，表面的には対称性が破れているように見えるけれど，背後に存在する対称性を保証していることがしばらくすると理解できるだろう．

次に対称性と保存則の関係を調べる必要がある．ここでは「ウォードの恒等式（Ward identity）」あるいは「ウォード–高橋の恒等式（Ward-Takahashi identity）」と呼ばれる関係式を経路積分で導いてそれを用いることにする．この関係式はゲージ対称性を保証する恒等式である．

そこでカイラル対称性をゲージ対称性へと格上げする．即ち θ_5 を座標に依存する $\theta_5(x)$ とし，ゲージ場 $A_{5\mu}(x)$ を導入して局所的なカイラル対称性に移行する．局所的（local）とは以前説明したように，変換パラメータが位置座標に依存する場合に用いる言葉である．従って局所カイラル対称性（local chiral symmetry）は

$$\psi(x) \Rightarrow \psi(x)^{\theta_5} = e^{i\gamma_5\theta_5(x)}\psi(x),\ \overline{\psi}(x) \Rightarrow \overline{\psi}(x)^{\theta_5} = \overline{\psi}(x)e^{i\gamma_5\theta_5(x)},$$
$$A_{5\mu}(x) \Rightarrow A_{5\mu}(x)^{\theta_5} = A_{5\mu}(x) - \frac{\hbar}{g_5}\partial_\mu\theta_5(x) \tag{4.320}$$

となる．作用において，微分を共変微分に置き換えると，

$$i\hbar\partial_\mu \Rightarrow i\hbar D_\mu(A_5) = i\hbar\partial_\mu - g_5\gamma_5 A_{5\mu}(x). \tag{4.321}$$

置き換え終えた作用がゲージ不変となることはこれまでと同様に確認できる．これは U(1) ゲージ対称性であるが γ_5 が余分に付いているので，$\mathrm{U}(1)_A$ ゲー

ジ対称性と呼ぶ．A は軸性（axial）を表すが，その意味するところは，作用をパリティ変換で不変とするためにはゲージ場 $A_{5\mu}(x)$ が軸性ベクトル（A）でなければばならないからである．一方 $\psi(x)$ が通常の電荷を持てば，フォトンをゲージ場とするゲージ理論となる．こちらはベクトル型の相互作用をするので $\mathrm{U}(1)_V$ ゲージ理論と呼んでよいだろう．即ち NJL 模型をゲージ理論に格上げすると，$\mathrm{U}(1)_V \times U(1)_A$ ゲージ対称性を持つ理論となる．南部理論は「本質的にゲージ理論」である．なぜならば超伝導は電磁相互作用をするので元来ゲージ理論であるが，BCS 理論を非相対論的南部理論として書き直すと，電磁相互作用が $\mathrm{U}(1)_A$ ゲージ理論となるからである．南部理論は，超伝導に適用すればゲージ対称性の自発的破れに特徴的な「マイスナー効果」（ギンツブルグ–ランダウの節を参照のこと）をも説明できる驚くべき理論である．

なぜ南部理論をゲージ理論に格上げできるかを一言でいうと，南部理論ではこれから述べるゲージ対称性を保証する「ウォードの恒等式」を満たすように，フェルミオンの質量を（ギャップ方程式によって自己無撞着に）決めるからである．ウォードの恒等式を導出する準備として，ゲージ理論に格上げされた南部理論においてゲージ場の経路積分を再検討し，ゲージ場のプロパゲーターを正しく求めておくことにしよう．

無限小のゲージ変換を考えるので，$\theta_5(x)$ を $\delta\theta_5(x)$ と無限小に小さくし，場の変化分を $\psi(x)' - \psi(x) = \delta\psi(x)$ 等とすると，

$$\delta\psi(x) = i\gamma_5\delta\theta_5(x)\psi(x),\ \delta\overline{\psi}(x) = \overline{\psi}(x)i\gamma_5\delta\theta_5(x), \tag{4.322}$$

$$\delta A_{5\mu}(x) = -\frac{\hbar}{g_5}\partial_\mu\delta\theta_5(x) \tag{4.323}$$

となる．念のためゲージ理論に格上げした NJL 作用を書いておくと，

$$\begin{aligned}
&S_{\text{gauged NJL}} \\
&= \int d^4x\ \left\{\overline{\psi}\left(\gamma^\mu[i\hbar\partial_\mu - g_5\gamma_5 A_{5\mu}(x)]\right)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{5\mu\nu}F_5^{\mu\nu}(x)\right\} \\
&-g\int d^4x\ \left[(\overline{\psi}\psi(x))(\overline{\psi}\psi(x)) - (\overline{\psi}\gamma_5\psi(x))(\overline{\psi}\gamma_5\psi(x))\right]
\end{aligned} \tag{4.324}$$

である．4 体フェルミ相互作用は (4.273) によれば，上記の $S-P$ の形ではなく $V-A$ の形にも書くことができることに注意しておこう．

すでに我々はフェルミオンのプロパゲーター $\langle\psi(x)\overline{\psi}(y)\rangle \equiv S_F(x-y)$ を経路積分を用いて求めた．スカラー場のプロパゲーター $D_F(x-y)$ もフォノンの場合に求めている．係数を調整すれば $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle \equiv D_F(x-y) = i\hbar D(x-y)$ となる．残るゲージ場のプロパゲーターをここで求めよう．プロパゲーターに添字 F を付けるのはファインマンに因んでいるが，c を添字に付ける人もいる．これは「因果的（causal)」を意味する．同じプロパゲーターはファインマン以前にシュツッケルベルグ（Stükelberg)」によって導入されていたので添字に F と書きたくない人も多いかもしれない．

さてゲージ場の経路積分を行うときには細心の注意が必要である．経路積分を行うのは量子化を行うことである．以前クーロンゲージでの量子化を実行したが，その議論は物理的意味が明確なので優れているが，ゲージ条件 $(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(x)=0)$ がローレンツ不変性を破っているので，相対論的に計算する場合には面倒である．従ってここでは別のゲージ条件を採用することにする．先ずゲージ場を縦波（L, longitudinal）と横波（T, transverse）に分解しよう．即ち

$$A_{5\mu}(x)=A_{5\mu}(x)_L+A_{5\mu}(x)_T,\ \text{where} \tag{4.325}$$
$$A_{5\mu}(x)_L=\left(\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\partial^2}\right)A_5^\nu(x),\ A_{5\mu}(x)_T=\left(g_{\mu\nu}-\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\partial^2}\right)A_5^\nu(x).$$

ところがゲージ場の作用は容易に分かるように

$$S_T=\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_{5\mu\nu}(x)F_5^{\mu\nu}(x)\right) \tag{4.326}$$
$$=\int d^4x\ \frac{1}{2}A_{5\mu}(x)_T\ \partial^2 A_5^\mu(x)_T \tag{4.327}$$

となって，横波成分 (A_{5T}) のみで書かれている．しかしながら例えば電荷密度（今の場合にはカイラル電荷密度）によって縦波成分 (A_{5L}) が誘起されるので，経路積分において縦波成分をどのように取り扱うかを決めておく必要がある．例えば縦波成分が次の作用を持つと仮定し（α はゲージパラメータと呼ばれる実数のパラメータ），これを作用に付け加えることにしよう．これは最も簡単な縦波の作用である．

$$S_L=\int d^4x\ \frac{-1}{2\alpha}(\partial_\mu A_5^\mu(x))^2=\int d^4x\ \frac{-1}{2\alpha}(\partial_\mu A_5^\mu(x)_T)^2. \tag{4.328}$$

この S_L はゲージ不変ではないけれど，経路積分を行った結果はゲージ不変であることが，次のようにして理解される．先ず縦波に関する経路積分をゲージ不変とするために，経路積分を $\theta_5(x)$ でゲージ変換し，更に全ての可能な $\theta_5(x)$ について加え合わせてみよう．即ち

$$Z_L=\int\mathcal{D}\theta_5(x)\int\mathcal{D}A_{5\mu}(x)^{\theta_5}e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ S_L(A_5^{\theta_5})}. \tag{4.329}$$

この量はゲージ不変となる．何故ならば，$\theta_5(x)'=\theta_5(x)+\alpha_5(x)$ と積分変数を取り替えると

$$(Z_L)^{\alpha_5}=\int\mathcal{D}\theta_5(x)\int\mathcal{D}A_{5\mu}(x)^{\theta_5+\alpha_5}e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ S_L(A_5^{\theta_5+\alpha_5})} \tag{4.330}$$
$$=\int\mathcal{D}\theta_5(x)'\int\mathcal{D}A_{5\mu}(x)^{\theta_5'}e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ S_L(A_5^{\theta_5'})}=Z_L \tag{4.331}$$

のように元に戻るからである．更に Z_L は $\theta_5\to\theta_5'=\theta_5+\frac{g_5}{\hbar\partial^2}(\partial A_5)$ と取り替えると

$$Z_L = \int \mathcal{D}\theta_5(x)' \, e^{\frac{i\hbar}{2\alpha g_5}\int d^4x \, (\partial^2\theta_5(x)')^2} \times \int \mathcal{D}A_{5\mu}(x) e^{\frac{i}{\hbar}S_L}$$
$$\propto \int \mathcal{D}A_{5\mu}(x) e^{\frac{i}{\hbar}S_L} \tag{4.332}$$

となる．期待値を求める時に分配関数の係数は消えるので係数は気にしなくてよい．従って，縦波の作用を S_L として経路積分を行うとゲージ不変であることが示されたので，最初の仮定は正しかったことが分かる．以上から，ゲージ場の縦成分と横成分の経路積分はまとめると

$$Z_{T+L} = \int \mathcal{D}A_{5\mu}(x) e^{\frac{i}{\hbar}(S_T+S_L)} = \int \mathcal{D}A_{5\mu}(x) e^{\frac{i}{\hbar}S_G}, \text{ where} \tag{4.333}$$
$$S_G \equiv \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{5\mu\nu} F_5^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_5^\mu(x))^2 \right) \tag{4.334}$$

である．この方法がゲージ不変性を保っていることが重要である．このときゲージ理論の作用 S_G は

$$S_G = \int d^4x \, \frac{1}{2} A_{5\mu}(x) \left(\partial^2 \delta^\mu{}_\nu - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial^\mu \partial_\nu \right) A_5^\nu(x) \tag{4.335}$$

である．従ってゲージ場のプロパゲーターは

$$\hat{A}^\mu_\nu G_F(x-y)^\nu{}_\lambda = i\hbar \delta^\mu{}_\lambda \, \delta^{(4)}(x-y), \text{ where} \tag{4.336}$$
$$\hat{A}^\mu_\nu = \partial^2 \delta^\mu{}_\nu - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial^\mu \partial_\nu \tag{4.337}$$

を満たすものとして，

$$\langle A_5^\mu(x) A_{5\nu}(y) \rangle \equiv G_F(x-y)^\mu{}_\nu \tag{4.338}$$
$$= \int d^4x \, \frac{-i\hbar \left(\delta^\mu{}_\nu - (1-\alpha)\frac{k^\mu k_\nu}{k^2} \right)}{k^2 + i\epsilon} \, e^{-ik_\lambda (x-y)^\lambda} \tag{4.339}$$

と求まる．$\alpha = 1$ をファインマンゲージといって一番よく使われる．いきなりゼロとはしないで $\alpha \to 0$ の極限としてゼロとすると，ランダウゲージ $(\partial_\mu A_5^\mu = 0)$ になる．

さてこれまでの議論におけるゲージ不変性は，分配関数に対してのみ示されていた．物理量 $O(\psi, \overline{\psi}, A_{5\mu})$ の期待値を計算した場合にその物理量のゲージ不変性が保証されるとは限らない．ゲージ不変性を保証するには物理量 O の期待値を経路積分を用いて計算し，その結果にゲージ不変性を課す必要がある．このとき得られるのが，物理量 O に対するウォードの恒等式である．即ちウォードの恒等式は物理量 O がゲージ不変な理論において満たすべき条件式である．物理量 O の期待値に対して，次の恒等式が成り立つ．

$$\left\langle O(\psi(x), \overline{\psi}(y), A_{5\mu}(z), \cdots) \right\rangle \tag{4.340}$$
$$= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\overline{\psi} \mathcal{D}A_{5\mu} \, O(\psi(x), \overline{\psi}(y), A_{5\mu}(z), \cdots) e^{\frac{i}{\hbar}S(\psi, \overline{\psi}, A_{5\mu})} \tag{4.341}$$

$$= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\psi^{\theta_5} \mathcal{D}\overline{\psi}^{\theta_5} \mathcal{D}A_{5\mu}^{\theta_5}\ O(\psi(x)^{\theta_5}, \overline{\psi}(y)^{\theta_5}, A_{5\mu}(z)^{\theta_5}, \cdots)$$
$$\times e^{\frac{i}{\hbar} S(\psi^{\theta_5}, \overline{\psi}^{\theta_5}, A_{5\mu}^{\theta_5})}. \tag{4.342}$$

ここで積分は $\int \mathcal{D}\psi^{\theta_5} \mathcal{D}\overline{\psi}^{\theta_5} \mathcal{D}A_{5\mu}^{\theta_5} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\overline{\psi} \mathcal{D}A_{5\mu}$ としてよいだろう．これをゲージ不変な「測度（measure)」という．測度とは積分するときの微小体積のことである．問題は作用のゲージ変換を元に戻せるかどうかである．ほとんどの作用は $S^\theta = S$ となって元に戻る．しかし戻らない作用が 1 つある．それはゲージ場の縦波成分に対する S_L である．なぜなら S_L はやや人工的に導入されていて，分配関数に対してはゲージ不変性を確認したけれど，物理量の期待値に対しては再検討を要するのである．無限小変換の場合

$$\begin{aligned}
\delta S_L &= \int d^4x\ \frac{-1}{2\alpha} \frac{\delta\left(\partial A_5(x)\right)^2}{\delta\theta_5(u)} \delta\theta_5(u) \\
&= \int d^4x \frac{-1}{\alpha} \partial A_5(x) \delta^{(4)}(x-u) \frac{-\hbar}{g_5} (\partial)^2 \delta\theta_5(u) \\
&= \frac{-1}{\alpha} (\partial)^2 \partial A_5(u) \frac{-\hbar}{g_5} \delta\theta_5(u).
\end{aligned} \tag{4.343}$$

他の作用は元に戻っているので，δS_L は (4.342) 式の中で以下の寄与をする．

$$\int \mathcal{D}A_5 \frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{-1}{\alpha} (\partial)^2 \partial_\mu A_5(u)^\mu \frac{-\hbar}{g_5} \delta\theta_5(u) \right\}$$
$$\times \left\{ 1 + \frac{i}{\hbar} \left(\int d^4x (-g_5) j_5^\nu(x) A_5(x)_\nu \right) + \cdots \right\} \times e^{\frac{i}{\hbar} S_G}$$
$$= \frac{1}{\hbar\alpha} \delta\theta_5(u) \int d^4x j_5^\nu(x) \langle A_5(x)_\nu (\partial)^2 \partial_\mu A_5(u)^\mu \rangle \tag{4.344}$$
$$= \frac{1}{\hbar\alpha} \delta\theta_5(u) \int d^4x j_5^\nu(x) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{-i\hbar\left(\delta_\nu^\mu - (1-\alpha)\frac{k_\nu k^\mu}{k^2}\right)}{k^2 + i\epsilon}$$
$$\times (\partial^u)^2 \partial_\mu^u e^{-ik(x-u)} = i\delta\theta_5(u)\ \partial_\mu j_5^\mu(u). \tag{4.345}$$

この計算において，後で説明する摂動論の手法を用いて相互作用 $-g_5 j_5^\mu A_5$ を 1 次の摂動で取り入れている．ここで分かったことは，作用が関与する因子 $e^{(\frac{i}{\hbar}S)}$ にゲージ変換を施すと，元に戻らずに，$\partial_\mu j_5^\mu e^{(\frac{i}{\hbar}S)}$ というおつりが出るということである．これはとても重要な点である．例えば運動方程式を仮定して保存則 $\partial_\mu j_5^\mu = 0$ が成り立つとすれば元に戻るが，上記の考察は量子力学的な揺らぎを取り入れた（経路積分を行なった）計算なので，古典的な運動方程式は使えない．しかしながら $\partial_\mu j_5^\mu$ が現れるのである．

これを使って (4.342) 式に戻ると，場所 u での無限小ゲージ変換 $\delta\theta_5(u)$ の下で次の関係式が得られる．

$$-i\delta\theta_5(u)\ \left\langle O(\psi(x), \overline{\psi}(y), A_{5\mu}(z), \cdots)\ \partial_\mu j_5^\mu(u) \right\rangle$$
$$= \left\langle i\gamma_5 \delta\theta_5(u) \psi(u) \frac{\delta}{\delta\psi(u)} O(\psi(x), \overline{\psi}(y), A_{5\mu}(z), \cdots) \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\langle \overline{\psi}(u) i\gamma_5 \delta\theta_5(u) \frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(u)} O(\psi(x), \overline{\psi}(y), A_{5\mu}(z), \cdots) \right\rangle \\
&- \frac{\hbar}{g_5} \left\langle \partial_\mu \delta\theta_5(u) \frac{\delta}{\delta A_{5\mu}(u)} O(\psi(x), \overline{\psi}(y), A_{5\mu}(z), \cdots) \right\rangle \\
&+ \cdots \\
= {}& \delta\theta_5(u) \times \Bigg\{ \delta^{(4)}(u-x) \left\langle O(i\gamma_5\psi(x), \overline{\psi}(y), A_{5\mu}(z), \cdots) \right\rangle \\
&+ \delta^{(4)}(u-y) \left\langle O(\psi(x), \overline{\psi}(y) i\gamma_5, A_{5\mu}(z), \cdots) \right\rangle \\
&+ \delta^{(4)}(u-z) \frac{\hbar}{g_5} \left\langle \delta O(\psi(x), \overline{\psi}(y), (\partial_z)_\mu, \cdots) \right\rangle + \cdots \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{4.346}
$$

これより物理量 O の期待値がゲージ不変な理論において満たすべき関係式

$$
\begin{aligned}
&- \left\langle O(\psi(x), \overline{\psi}(y), A_{5\mu}(z), \cdots)\ \partial_\mu j_5^\mu(u) \right\rangle \\
= {}& \delta^{(4)}(u-x) \left\langle O(\gamma_5\psi(x), \overline{\psi}(y), A_{5\mu}(z), \cdots) \right\rangle \\
&+ \delta^{(4)}(u-y) \left\langle O(\psi(x), \overline{\psi}(y)\gamma_5, A_{5\mu}(z), \cdots) \right\rangle \\
&+ \delta^{(4)}(u-z) \left\langle O\left(\psi(x), \overline{\psi}(y), \frac{-1}{g_5}(i\hbar\partial_z)_\mu, \cdots\right) \right\rangle + \cdots
\end{aligned} \tag{4.347}
$$

が得られる．これが「ウォードの恒等式」である．

先ず最初に計算したい期待値は

$$
\Gamma_5^\mu(x,y,z)_{\alpha\beta} = \langle \psi(x)_\alpha \overline{\psi}(y)_\beta j_5^\mu(z) \rangle \tag{4.348}
$$

である．これは z にある「軸性カレント（axial current）」j_5^μ によって，x から入射したフェルミオンが y の位置にあるフェルミオンへ散乱される過程を表す「バーテックス関数（vertex）」である．バーテックスとは「頂点」の意味であるが，相互作用によって粒子の運動方向が曲げられて粒子の軌跡に角（頂点）が作られるので，相互作用を表すときにこの言葉を用いるのが慣例となっている．

具体的に計算に入る前に，物理量 O の期待値を計算する一般的方法を説明しておくのがよいだろう．経路積分によると期待値は次のように計算されることは知っている．

$$
\begin{aligned}
&\left\langle O\left(\psi(x)_\alpha,\ \overline{\psi}(y)_\beta,\ A_5^\mu(z),\ \cdots\right)\right\rangle \\
&= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\psi(x)\mathcal{D}\overline{\psi}(x)\mathcal{D}A_{5\mu}\ O\left(\psi(x)_\alpha, \overline{\psi}(y)_\beta, A_5^\mu(z), \cdots\right) \\
&\qquad \times e^{\frac{i}{\hbar}[S_0(\psi,\overline{\psi},A_{5\mu}) + S_I(\psi,\overline{\psi},A_{5\mu})]}
\end{aligned} \tag{4.349}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}A_{5\mu}\ O\left(\psi(x)_\alpha, \overline{\psi}(y)_\beta, A_5^\mu(z), \cdots\right) \\
&\qquad \times \left(1 + \frac{i}{\hbar} S_I(\psi,\ \overline{\psi},\ A_{5\mu}) + \cdots\right) \times e^{\frac{i}{\hbar}S_0(\psi,\ \overline{\psi},\ A_{5\mu})}.
\end{aligned} \tag{4.350}
$$

前にも述べたように，実行できる積分は本質的にガウス積分しかない．この積

分を実行するときに，指数関数の肩にある相互作用を $\left(1+\frac{i}{\hbar}S_I+\frac{1}{2!}\left(\frac{i}{\hbar}S_I\right)^2\cdots\right)$ と展開するのがコツである．この展開は相互作用の強さによる展開であるので，「摂動展開 (perturbative expansion)」あるいはこのような方法を「摂動論 (perturbation theory)」という．プロパゲーターの計算と同様にして，場の変数 ψ, $\overline{\psi}$, $A_{5\mu}$ にソース $\overline{\eta}$, η, $j^{\mu}_{A_5}$ を導入すると，次のように計算できる．

$$\left\langle O\left(\psi(x)_\alpha,\ \overline{\psi}(y)_\beta,\ A_5^\mu(z),\ \cdots\right)\right\rangle \tag{4.351}$$

$$= O\left(i\hbar\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x)_\alpha},\ i\hbar\frac{\delta}{\delta\eta(y)_\beta},\ i\hbar\frac{\delta}{\delta A_{5\mu}(z)},\cdots\right)$$
$$\times\left(1+\frac{i}{\hbar}S_I\left(i\hbar\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}},\ i\hbar\frac{\delta}{\delta\eta},\ i\hbar\frac{\delta}{\delta A_{5\mu}}\right)+\cdots\right) \tag{4.352}$$
$$\times e^{\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2\int d^4u\int d^4v\left(\overline{\eta}(u)S_F^{(m)}(u-v)\eta(v)+\frac{1}{2}j^\mu_{A_5}(u)G_F(u-v)_{\mu\nu}j^\nu_{A_5}(v)\right)}\Big|_{\eta=0,\overline{\eta}=0,j^\mu_{A_5}=0}.$$

ガウス積分を実行する際に用いる S_0 のゲージ場に関する部分は上で議論した S_G である．ここではフェルミオンの作用をどう選ぶかが問題となる．質量ゼロの作用とするか，質量ノンゼロの作用とするかである．南部は「質量を持つ作用を使って摂動論を展開し，そのとき用いる質量を，ゲージ不変性を保ちながら自己無撞着に決定するのが正しい方法である」と考えた．従って我々も上式におけるプロパゲーターの質量 m を明記し $S_F^{(m)}$ とした．

摂動展開の式 (4.352) を説明する．この式は $O(\psi,\overline{\psi},A_{5\mu},\cdots)$ および $S_I(\psi,\overline{\psi},A_{5\mu})$ の中にある $\psi(x)_\alpha$ と $\overline{\psi}(y)_\beta$ のペアを一つ選んでそれらを対応するプロパゲーター $S_F^{(m)}(x-y)_{\alpha\beta}$ に置き換えることを意味し，$A_{5\mu}(x)$ と $A_{5\nu}(y)$ のペアに対してもそれらを対応するプロパゲーター $G_F(x-y)_{\mu\nu}$ に置き換えることを意味している．置き換えはあらゆるフェルミオンとゲージボソンのペアに対して実行しなければならないし，ペアの組み方も色々あるので，あらゆるペアの組み方に対して，それぞれのペアをプロパゲーターに置き換えることになる．フェルミオンのプロパゲーターを y から x に向かう「方向付けられた線」で表し，ゲージ場のプロパゲーターを，方向を指定しないで y と x を結ぶ波線で表すことにする*5)．S_I から選ばれた相互作用項は，ある点での幾つかの場の積である．この幾つかの場はそれぞれが別の場とペアを組んでプロパゲーターに置き換わるので，相互作用が起きる点でプロパゲーターが合流することになる．従って相互作用点は，プロパゲーターが一点に集結するバーテックスとなる．このようにして幾つかのバーテックスをプロパゲーターで結んだダイアグラム（図形）が描かれる．これを「ファインマン図 (Feynman diagram)」という．ファインマン図を見れば，その方向付けられた線や波線や破線にどんな関数を置いて，バーテックスには相互作用項からどんな関数を持って来るのかが瞬時に分かるので，期待値の計算が視覚化されて便利である．

以上で色々な期待値を計算する準備は終わった．先ずバーテックス関数

*5) スカラーのプロパゲーター $D_F(x-y)$ は破線で表すのが慣例である．

$\Gamma_5(x,y,z)^\mu_{\alpha\beta}$ を計算するがこれに関係する「ウォードの恒等式」(4.347) を書いておこう．それは $\langle\psi(x)_\alpha\overline{\psi}(y)_\beta\rangle$ に対するウォードの恒等式（WI）である．

$$-\partial^z_\mu\Gamma_5(x,y,z)^\mu_{\alpha\beta} = -\left\langle\psi(x)_\alpha\overline{\psi}(y)_\beta\ \partial_\mu j^\mu_5(z)\right\rangle \tag{4.353}$$
$$= \delta^{(4)}(z-x)\left\langle(\gamma_5\psi(x))_\alpha\,\overline{\psi}(y)_\beta\right\rangle + \delta^{(4)}(z-y)\left\langle\psi(x)_\alpha\left(\overline{\psi}(y)\gamma_5\right)_\beta\right\rangle.$$

ウォードの恒等式を南部は「ファインマン図を用いてグラフィカルに」理解する．先ず運動方程式に現れる演算子を，ラグランジアンに因んで L と書く．我々が $\hat{A}$ としたものである．以下では南部にならって，スピン 1/2 のフェルミオンに対し，質量がゼロとノンゼロの 2 種類の L を導入する．

$$\overrightarrow{L}^{(0)} = i\hbar\gamma^\mu\overrightarrow{\partial}_\mu,\quad \overleftarrow{L}^{(0)} = -i\hbar\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu, \tag{4.354}$$
$$\overrightarrow{L}^{(m)} = i\hbar\gamma^\mu\overrightarrow{\partial}_\mu - mc,\quad \overleftarrow{L}^{(m)} = -i\hbar\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - mc. \tag{4.355}$$

すると次の恒等式が得られる．導出に当たって運動方程式は使わない．

$$-\partial_\mu j^\mu_5(x) = \overline{\psi}(x)\left(\left(\overleftarrow{L}^{(0)}/i\hbar\right)\gamma_5 + \gamma_5\left(\overrightarrow{L}^{(0)}/i\hbar\right)\right)\psi(x) \tag{4.356}$$
$$= \overline{\psi}(x)\left(\left(\overleftarrow{L}^{(m)}/i\hbar\right)\gamma_5 + \gamma_5\left(\overrightarrow{L}^{(m)}/i\hbar\right)\right)\psi(x)$$
$$+\,(2mc/i\hbar)\,j_5(x). \tag{4.357}$$

ここで運動方程式を用いると，質量ゼロの場合のカイラルカレントの保存則と質量ノンゼロの場合のカイラルカレント保存則の破れが得られるのでこの恒等式が保存則と密接に関係していることが分かる．次に運動方程式を使わずに，経路積分の中でこの恒等式を使うことにする．上では $\overrightarrow{L}$ と $\overleftarrow{L}$ を区別したが，経路積分の中では常に部分積分を使うので，両者を区別する必要はない．従って共に演算子 $\hat{L}^{(0)}$ あるいは $\hat{L}^{(m)}$ と書いてよいだろう．$\hat{L}^{(m)}/i\hbar$ はプロパゲーターとの関係から分かるように，右隣あるいは左隣にあるプロパゲーターを 1 つ落とす働きがある．即ち

$$(\hat{L}^{(0,\ m)}(x)/i\hbar)_{ij}S_F^{(0,\ m)}(x-y)_{jk} = \delta_{ik}\delta^{(4)}(x-y), \tag{4.358}$$
$$S_F^{(0,\ m)}(x-y)_{ij}(\hat{L}^{(0,\ m)}(y)/i\hbar)_{jk} = \delta_{ik}\delta^{(4)}(x-y). \tag{4.359}$$

従って，カイラルカレントの WI (4.353) の左辺にある $-\partial_\mu j^\mu_5$ に，質量がゼロの場合の上記の恒等式を代入すると，

$$-\left\langle\psi(x)_\alpha\overline{\psi}(y)_\beta\ \partial_\mu j^\mu_5(z)\right\rangle \tag{4.360}$$
$$= \left\langle\psi(x)_\alpha\ \overline{\psi}(z)\left(\left(\overleftarrow{L}^{(0)}/i\hbar\right)\gamma_5 + \gamma_5\left(\overrightarrow{L}^{(0)}/i\hbar\right)\right)\psi(z)\ \overline{\psi}(y)_\beta\right\rangle$$
$$= \delta^{(4)}(z-x)\left\langle(\gamma_5\psi(x))_\alpha\,\overline{\psi}(y)_\beta\right\rangle + \delta^{(4)}(z-y)\left\langle\psi(x)_\alpha\left(\overline{\psi}(y)\gamma_5\right)_\beta\right\rangle$$
$$+\left\langle\psi(x)_\alpha\ \overline{\psi}(z)\left(\left(\overleftarrow{L}^{(0)}/i\hbar\right)\gamma_5 + \gamma_5\left(\overrightarrow{L}^{(0)}/i\hbar\right)\right)\psi(z)\ \overline{\psi}(y)_\beta\right.$$
$$\left.\times\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4u\ (-g)[(\overline{\psi}\psi)^2 - (\overline{\psi}\gamma_5\psi)^2](u) + O(g^2)\right\}\right\rangle. \tag{4.361}$$

WI が成立するためには，上式の第 3 項がゼロでなければならない．次に質量がノンゼロのプロパゲーターを使った場合にはどうなるだろうか．上記の計算を質量 m のプロパゲーターを使って実行すると

$$
\begin{aligned}
&-\left\langle\psi(x)_\alpha\overline{\psi}(y)_\beta\ \partial_\mu j_5^\mu(z)\right\rangle \qquad (4.362)\\
&=\left\langle\psi(x)_\alpha\ \overline{\psi}(z)\left(\left(\overleftarrow{L}^{(m)}/i\hbar\right)\gamma_5+\gamma_5\left(\overrightarrow{L}^{(m)}/i\hbar\right)\right)\psi(z)\ \overline{\psi}(y)_\beta\right\rangle\\
&=\delta^{(4)}(z-x)\left\langle(\gamma_5\psi(x))_\alpha\overline{\psi}(y)_\beta\right\rangle+\delta^{(4)}(z-y)\left\langle\psi(x)_\alpha\left(\overline{\psi}(y)\gamma_5\right)_\beta\right\rangle\\
&+(2mc/i\hbar)\left\langle\psi(x)_\alpha\overline{\psi}(y)_\beta\ j_5(z)\right\rangle\\
&+\left\langle\psi(x)_\alpha\ \overline{\psi}(z)\left(\left(\overleftarrow{L}^{(m)}/i\hbar\right)\gamma_5+\gamma_5\left(\overrightarrow{L}^{(m)}/i\hbar\right)\right)\psi(z)\ \overline{\psi}(y)_\beta\right.\\
&\left.\times\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4u\ (-g)[(\overline{\psi}\psi)^2-(\overline{\psi}\gamma_5\psi)^2](u)+O(g^2)\right\}\right\rangle. \qquad (4.363)
\end{aligned}
$$

従って WI が成立するためには，上式右辺の第 3 項（m に比例する項）と第 4 項（量子揺らぎの補正項）の和がゼロにならなければならない．実は驚くべきことに，この第 3 項と第 4 項の和がゼロになるべしとする WI からの要請は，質量を「ギャップ方程式」を用いて自己無撞着に決定すべしとする要請と同一である．もちろん質量ゼロのプロパゲーターを用いた場合には質量は出ないので，質量ゼロの場合の WI からの要請も満たされている．これからそれを具体的に計算して確認しよう．

先ずカイラルカレント（軸性カレント）のバーテックス関数 $\Gamma^\mu_{5\alpha\beta}(x,y,z)$ に対するファインマン図を見てみよう．図 4.1 である．ここでは座標表示でなく運動量表示で書いたが，少し読み進むと理解できるだろう．両者の関係は

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^\mu_{5\alpha\beta}(x,y,z) \qquad (4.364)\\
&=\int\frac{d^4p_1}{(2\pi\hbar)^4}\int\frac{d^4p_2}{(2\pi\hbar)^4}\int\frac{d^4p_3}{(2\pi\hbar)^4}\ \Gamma^\mu_{5\alpha\beta}(p_1,p_2,p_3)\ e^{\frac{-i}{\hbar}(p_1x+p_2y+p_3z)}.
\end{aligned}
$$

このバーテックス関数を記載するとき，座標の原点をどこに取っても結果は変わらない．従って $\Gamma^\mu_{5\alpha\beta}(x,y,z)=\Gamma^\mu_{5\alpha\beta}(x+c,y+c,z+c)$ が成り立つ．そのためにはエネルギー・運動量の保存則 $(p_1+p_2+p_3)^\mu=0$ が成り立たなければならない．$(p_1,\ p_2,\ p_3)$ は $(x,\ y,\ z)$ から入射する 4 次元運動量である．従って

$$
p_1=p-\frac{q}{2},\ p_2=-p-\frac{q}{2},\ p_3=q \qquad (4.365)
$$

と取ることができ，バーテックス関数を $\Gamma^\mu_{5\alpha\beta}(p-\frac{q}{2},p+\frac{q}{2})$ と表すことができる．この場合フェルミオンは運動量 $p-\frac{q}{2}$ を持って入射し，運動量 $p+\frac{q}{2}$ を持って出て行く．これから計算するのは図 4.1 に描かれたファインマン図である．図 4.1 の第 1 項 (図 4.1–1) は

$$
(\text{図 4.1–1})=(S_F(y-z)\gamma^\mu\gamma_5S_F(z-x))_{\beta\alpha} \qquad (4.366)
$$

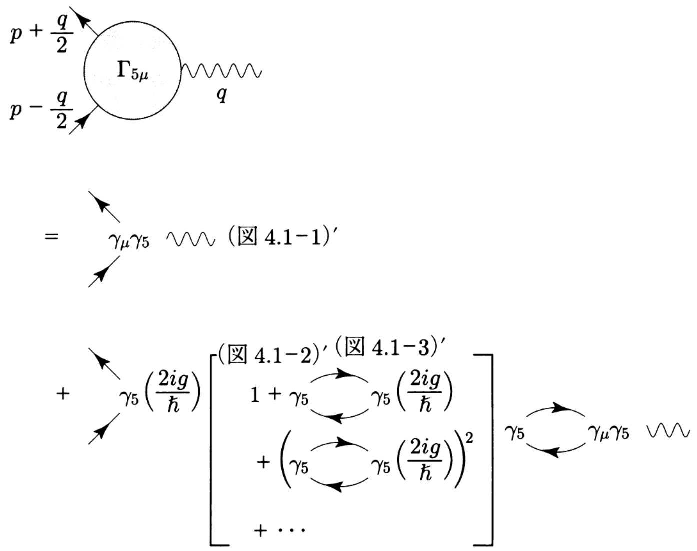


図 4.1

である．粒子が外部から入射する部分のプロパゲーターと散乱して出て行く部分のプロパゲーターを「外線（external line)」といい，それ以外の外部とつながっていないプロパゲーターを「内線（internal line)」という．以下では「$\gamma^\mu k_\mu \equiv \not{k}$」というよく使われる表記を用いることにする．

$$(\text{図 4.1–1}) = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\left(S_F(k_2)\gamma^\mu\gamma_5 S_F(k_1)\right)_{\beta\alpha} \times e^{-i(k_2(y-z)+k_1(z-x))}. \tag{4.367}$$

ここでは運動量表示のプロパゲーターとして $S_F(k)$ を導入した．即ち

$$S_F(k) \equiv \frac{i(\not{k} + mc/\hbar)}{(k)^2 - (mc/\hbar)^2 + i\epsilon}. \tag{4.368}$$

そうすると運動量表示のバーテックス関数の第 1 項 (図 4.1–1) は次のようになる．

$$\Gamma^\mu_{5\alpha\beta}\left(p-\frac{q}{2},\ p+\frac{q}{2}\right) = \left(S_F\left(p+\frac{q}{2}\right)\gamma^\mu\gamma_5 S_F\left(p-\frac{q}{2}\right)\right)_{\beta\alpha}. \tag{4.369}$$

以下の計算において，常にフェルミオンの 2 つの外線に対してプロパゲーター $S_F(p-\frac{q}{2})$ と $S_F(p+\frac{q}{2})$ が現れるので，これらを取り除いた*6) バーテックス関数を $\tilde{\Gamma}$ と表そう．バーテックス関数に限らず，散乱を表すときには全ての外線のプロパゲーターを落として（外線の足を切るかあるいはもいで)，その部分に外部から入射したり外部に放出されたりする粒子の波動関数を掛ける．そのようにして「散乱振幅（scattering amplitude)」$\langle \text{out}|\mathcal{A}|\text{in}\rangle$ が計算される．

---

*6） これを「外線の足を切る（amputated)」あるいは「外線をもぐ」という．

散乱振幅とは，その絶対値の二乗が散乱される確率を表すが詳細はここでは説明しない．つまり

$$\langle \mathrm{out}|\mathcal{A}|\mathrm{in}\rangle \tag{4.370}$$
$$= \overline{\psi}\left(p+\frac{q}{2},\ s_z'\right)_{out}\tilde{\Gamma}^{\mu}\left(p-\frac{q}{2},\ p+\frac{q}{2}\right)\psi\left(p-\frac{q}{2},\ s_z\right)_{in}. \tag{4.371}$$

ここで ψ_{in} や $\overline{\psi}_{out}$ は，in-coming フェルミオンと out-going フェルミオンの波動関数でディラック方程式の解である．s_z, s_z' はスピンの状態を表す．

結局第 1 項は

$$\tilde{\Gamma}_5^{\mu}\left(p-\frac{q}{2},\ p+\frac{q}{2}\right)(\text{図 4.1–1}) = \gamma^{\mu}\gamma_5 \tag{4.372}$$

と求まった．強いて行列の成分を指定する必要もないので無視した．これが運動量表示で表した外線を除いたバーテックス関数の第 1 項である．

次に第 2 項 (図 4.1–2) に移ろう．これは摂動の 1 次の項であり上記のように運動量表示で外線を取り除いたものをプライムを付けて (図 4.1–2)$'$ としよう．そうすると

$$\begin{aligned}(\text{図 4.1–2})' &= \gamma_5\left(\frac{2ig}{\hbar}\right)(-1)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu}\gamma_5 S_F(k)\gamma_5 S_F(k+q/\hbar)\right]\\ &\equiv \gamma_5 J_{PA}(q)^{\mu}\end{aligned} \tag{4.373}$$

になる．結合定数 g に係数 2 が掛かっているがこれはペアの組み方に 2 通りあるからである．因子 (-1) はフェルミオンが一周してループを作るときに常に現れる因子である．フェルミオンのペアを作ってそれをプロパゲーターに置き換えてループを作ろうとすると，相互作用の積において，一番右側にあるフェルミオンを一番左側に持って行く必要がある．このとき奇数回フェルミオンを交換することになって (-1) が出る．具体的に書くと，

$$\begin{aligned}&\langle(\overline{\psi}_1 A_1\psi_1)(\overline{\psi}_2 A_2\psi_2)\cdots(\overline{\psi}_n A_n\psi_n)\rangle\\ &= (-1)\langle\psi_n(\overline{\psi}_1 A_1\psi_1)\cdots(\overline{\psi}_{n-1}A_{n-1}\psi_{n-1})\overline{\psi}_n A_n\rangle\\ &= (-1)\mathrm{Tr}\left[S_F(n,1)A_1 S_F(1,2)\cdots S_F(n-1,n)A_n\right]\end{aligned} \tag{4.374}$$

である．フェルミオンループには必ず (-1) を付けると覚えておこう．(4.373) の計算を続けよう．$J_{PA}(q)$ と書いたのは，擬スカラー（P）と軸性ベクトル（A）を結んでいて，軸性ベクトル（A）の所から運動量 q が入ってくるからである．

$$\begin{aligned}J_{PA}(q)^{\mu} &= \left(-\frac{2ig}{\hbar}\right)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\ &\times\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu}\gamma_5\frac{i(\not{k}+mc/\hbar)}{k^2-(mc/\hbar)^2+i\epsilon}\gamma_5\frac{i(\not{k}+\not{q}/\hbar+mc/\hbar)}{(k+q/\hbar)^2-(mc/\hbar)^2+i\epsilon}\right].\end{aligned} \tag{4.375}$$

さて計算を続けるためにはディラック行列の積のトレース（Tr）を取るこ

となる．そのとき必要な公式を少し書いておく．証明はトレースの性質 $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ と γ 行列の交換関係 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ を使うだけなので難しくない．従って自分で導出を試みるか，文献 [11] の Appendix あるいはその他の参考書を参照することにしよう．

$$\mathrm{Tr}1 = 4,\ \mathrm{Tr}(\text{odd number product of } \gamma' s) = 0, \tag{4.376}$$
$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu},\ \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho) = 4\left(g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\right).$$

これを使うと

$$\begin{aligned}
&J_{PA}(q)^\mu \\
&= \frac{4ig}{\hbar^3}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(2mc)q^\mu}{[(k)^2 - (mc/\hbar)^2 + i\epsilon][(k+q/\hbar)^2 - (mc/\hbar)^2 + i\epsilon]} \\
&\equiv (2mc)q^\mu I(q)
\end{aligned} \tag{4.377}$$

となる．

更に第 3 項を考えよう．この項 (図 4.1–3)$'$ は

$$\begin{aligned}
(\text{図 } 4.1\text{–}3)' &= (\text{図 } 4.1\text{–}2)' \times \left(\frac{2ig}{\hbar}\right)(-1) \\
&\qquad \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \mathrm{Tr}\left[\gamma_5 S_F(k)\gamma_5 S_F(k+q/\hbar)\right] \\
&\equiv (\text{図 } 4.1\text{–}2)' \times J_P(q)
\end{aligned} \tag{4.378}$$

となる．この場合には P と P をつないでいるから $J_P(q)$ とする．計算を続けると

$$\begin{aligned}
&J_P(q) \\
&= \left(\frac{-2ig}{\hbar}\right)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\gamma_5 \frac{i(\not k + mc/\hbar)}{(k)^2 - (mc/\hbar)^2 + i\epsilon}\right. \\
&\qquad\qquad \left. \times\, \gamma_5 \frac{i(\not k + \not q/\hbar + mc/\hbar)}{(k+q/\hbar)^2 - (mc/\hbar)^2 + i\epsilon}\right] \\
&= \frac{-4ig}{\hbar}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{[(k)^2 - (mc/\hbar)^2] + [(k+q/\hbar)^2 - (mc/\hbar)^2] - (q/\hbar)^2}{[(k)^2 - (mc/\hbar)^2 + i\epsilon][(k+q/\hbar)^2 - (mc/\hbar)^2 + i\epsilon]} \\
&= -\frac{8ig}{\hbar}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k)^2 - (mc)^2 + i\epsilon} + q^2 I(q).
\end{aligned} \tag{4.379}$$

上式の 2 行目において，分子を分母の 2 つの因子に関して対称になるように変形した．そうすると分子に分母のプロパゲーターの 1 つを消す因子が現れて 3 行目のように簡単な式になる．プロパゲーターが 1 つ落ちることを WI において経験したので，ここに WI の関与が推測される．その結果得られた右辺の第 1 項は 1 つのプロパゲーターの積分であり，第 2 項は J_{PA} に現れたのと同じ $I(q)$ が現れる．ここでフェルミオンの質量を決める「ギャップ方程式」(4.294) を思い出すと，第 1 項は 1 となる．従って，自己無撞着にフェルミオンの質量

を決めた場合には，

$$J_P(q) = 1 + q^2 I(q) \tag{4.380}$$

という極めてシンプルな関係式が得られる．そうすると，図 4.1 の全ての項（ファインマン図）を等比級数を用いて足し合わせることができる．即ち

$$\begin{aligned}
(\text{図 } 4.1)' &= \tilde{\Gamma}_5^\mu \left(p - \frac{q}{2},\ p + \frac{q}{2}\right) \\
&= \gamma^\mu \gamma_5 + \gamma_5 \left\{1 + (1 + q^2 I(q)) + (1 + q^2 I(q))^2 + \cdots\right\} (2mc) q^\mu I(q) \\
&= \gamma^\mu \gamma_5 + \gamma_5 \frac{1}{1 - (1 + q^2 I(q))} (2mc) q^\mu I(q) \\
&= \gamma^\mu \gamma_5 - 2mc\ \gamma_5 \frac{q^\mu}{q^2}.
\end{aligned} \tag{4.381}$$

これが南部が導出した最も重要な関係式であり，南部理論のハイライトである．右辺の第 2 項に現れた $\frac{1}{q^2}$ は，質量ゼロのスカラー粒子のプロパゲーターと考えられる．これが $J_P(q)$ を鎖のようにつないだファインマン図から出現した．この質量ゼロ粒子を理解するために複合粒子 $\pi(x) = \overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$ のプロパゲーターを計算して見よう．すると

$$\begin{aligned}
\langle \pi(x)\pi(y) \rangle &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\hbar}{2ig} \\
&\qquad \times \left\{J_P(q) + (J_P(q))^2 + (J_P(q))^3 + \cdots\right\} e^{-ik(x-y)} \\
&= \frac{1}{2g} \frac{i\hbar}{q^2} \left(\frac{1 + q^2 I(q)}{I(q)}\right) \\
&\approx \frac{1}{2gI(0)} \frac{i\hbar}{q^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}, \text{ for small } q
\end{aligned} \tag{4.382}$$

になる．つまり π 粒子のプロパゲーターは $J_P(q)$ を鎖のようにつないだファインマン図から計算できて，π 粒子が質量ゼロの粒子であることも確認できた．

次に対称性を調べるために，バーテックス関数に波動関数を掛けて作った確率振幅に対して WI をチェックしよう．

$$\begin{aligned}
&\overline{\psi}\left(p + \frac{q}{2},\ s'_z\right)_{\text{out}} q_\mu \tilde{\Gamma}^\mu \left(p - \frac{q}{2},\ p + \frac{q}{2}\right) \psi\left(p - \frac{q}{2},\ s_z\right)_{\text{in}} \\
&= \overline{\psi}\left(p + \frac{q}{2},\ s'_z\right)_{\text{out}} (\not{q}\gamma_5 - 2mc\ \gamma_5) \psi\left(p - \frac{q}{2},\ s_z\right)_{\text{in}} \qquad (4.383) \\
&= \overline{\psi}\left(p + \frac{q}{2},\ s'_z\right)_{\text{out}} \left[\left(\not{p} + \frac{\not{q}}{2} - mc\right)\gamma_5 + \gamma_5\left(\not{p} - \frac{\not{q}}{2} - mc\right)\right] \\
&\times \psi\left(p - \frac{q}{2},\ s_z\right)_{\text{in}} = 0 \qquad (4.384)
\end{aligned}$$

となる．WI をカイラルカレントのバーテックス関数に適用した (4.362) 式を見てみよう．ここでは外線の足は落としていなかった．散乱振幅にするためには外線の足を落とす必要がある．式 (4.363) を見てみよう．この第 1 項と第 2 項は，$L^{(m)}$ が外線のプロパゲーター $\langle \psi(x)_\alpha \overline{\psi}(z) \rangle$ あるいは $\langle \psi(z) \overline{\psi}(y)_\beta \rangle$ を落として得られたものである．一方最後の第 4 項は $L^{(m)}$ が内線に作用した項で

ある．さて最初から外線のプロパゲーターを落としてそれを波動関数に置き換えていたらどうなるだろうか．その場合には $L^{(m)}$ が直接波動関数に作用するので，$\overrightarrow{L}^{(m)}\psi(z)_{in}=0, \overline{\psi}(z)\overleftarrow{L}^{(m)}=0$ となる．更にゲージ場の外線に関しても，WI を一般的に導出したときには，外線の A_μ を ∂_μ に置き換えることになっていた．この置き換えは，散乱振幅に対しては波動関数を $\partial_\mu A^\mu_{\text{in,out}}$ とすることに相当する．散乱に関与するフォトンは横波なので縦波成分はゼロとなる．つまり散乱振幅に対する WI において，散乱に関与する全ての粒子が運動方程式を満たしかつフォトンが横波であるならば，外線からの寄与は全てゼロとなる．従って物理的な散乱振幅において WI は

$$\partial^z_\mu \langle \text{out}; p'_1, p'_2, \cdots | j^\mu_5(z) | p_1, p_2, \cdots; \text{in}\rangle = 0, \tag{4.385}$$

$$q_\mu \langle \text{out}; p'_1, p'_2, \cdots | j^\mu_5(q) | p_1, p_2, ...; \text{in}\rangle = 0 \tag{4.386}$$

となる．これがカレントの保存則を量子揺らぎを含めて拡張した関係式であり，系のゲージ対称性を保証する関係式である．

即ち南部はこのようにして，(1)「質量を自己無撞着に（自発的にカイラル対称性を破って）生成した場合には，π という質量ゼロの複合粒子（フェルミオンと反フェルミオンの擬スカラー複合粒子）が発生して，古典的には質量が発生したために破れたかに見えたカイラル対称性は，量子論では（量子揺らぎを取り入れると）保存される」ことを発見した．更にゲージ理論として議論を進めたので，(2)「ゲージ場（この場合には $A_{5\mu}(x)$）が，自発的対称性の破れによって質量を持ったとしても，ゲージ対称性は量子論では（量子揺らぎを取り入れると）保存される」ことを示した．これはマイスナー効果がゲージ理論と矛盾しないということである．この 2 つの大発見によって，自発的対称性の破れによって，フェルミオンの質量とゲージボソンの質量がゲージ対称性と矛盾せずに生成できることが分かった．現在の素粒子模型は，第 5 章以降に説明するようにこの考えの下に作られている．

上で述べたゲージボソンの質量生成問題を議論しよう．そのためには図 4.2 にあるファインマン図を計算する必要がある．(図 4.2–1) はゲージボソンの最初に考えられる補正である．今度は最初からゲージボソンの 2 つの外線は落として運動量表示で書くと，

$$(\text{図 } 4.2\text{–}1)' \equiv J_{AA}(q)^{\mu\nu} \tag{4.387}$$

$$= \left(\frac{-ig_5}{\hbar}\right)^2 (-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \text{Tr}\left[\gamma^\mu\gamma_5 \frac{i(\not{k}+mc/\hbar)}{(k)^2-(mc/\hbar)^2+i\epsilon} \times \gamma^\nu\gamma_5 \frac{i(\not{k}+\not{q}/\hbar+mc/\hbar)}{(k+q/\hbar)^2-(mc/\hbar)^2+i\epsilon}\right]. \tag{4.388}$$

これを直接計算しないで，よく知られている下記のベクトル場の補正

$$J_{VV}(q)^{\mu\nu} \tag{4.389}$$

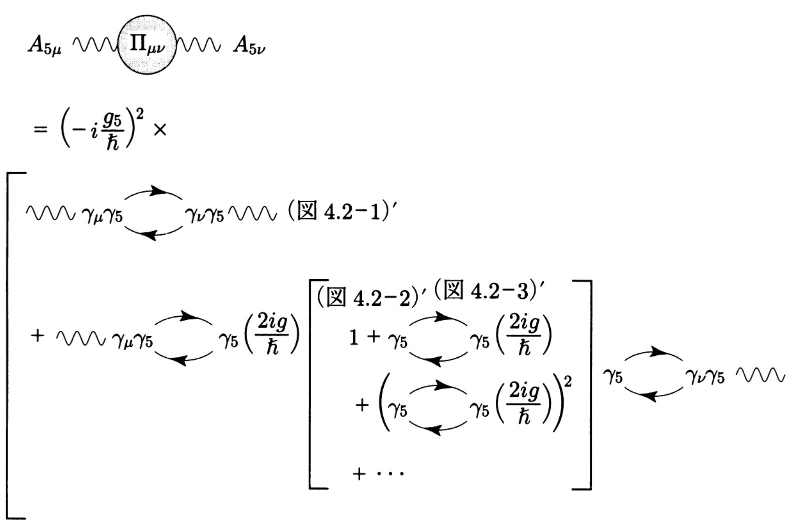


図 4.2

$$
= \left(\frac{-ig_5}{\hbar}\right)^2 (-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, Tr \left[\gamma^\mu \frac{i(\not{k} + mc/\hbar)}{(k)^2 - (mc/\hbar)^2 + i\epsilon} \times \gamma^\nu \frac{i(\not{k} + \not{q}/\hbar + mc/\hbar)}{(k+q/\hbar)^2 - (mc/\hbar)^2 + i\epsilon}\right] \tag{4.390}
$$

との差を計算することにしよう．そうすると

$$
J_{AA}(q)^{\mu\nu} - J_{VV}(q)^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{i}{\hbar}\right) (2g_5 mc)^2 \frac{I(q)}{g}. \tag{4.391}
$$

対称性の自発的破れに付随してゲージボソンの質量が生成されたとしよう．そうすると作用に

$$
\frac{i}{\hbar} S_{\text{gauge boson mass}} = \frac{i}{\hbar} \int d^4x\, \frac{1}{2} (m_A)^2 A_{5\mu}(x) A^{5\mu}(x) \tag{4.392}
$$

が現れる．$J_{VV}(q)$ は横波成分のみで，縦波成分は出ない，即ち

$$
J_{VV}(q)^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu\right) \Pi_V(q) \tag{4.393}
$$

となることはよく知られている．

上記の J_{AA} からゲージボソンに質量が誘起されるが，$mc = 2g\langle\sigma\rangle$ であることを思い出すと，これは対称性の自発的破れによって現れた質量であり，

$$
m_{A_5}^2 = (2g_5 mc)^2 \frac{I(0)}{g} \propto (g_5\langle\sigma\rangle)^2 \tag{4.394}
$$

である．つまり (図 4.2–1) はギンツブルグ–ランダウの結果を再現している．ゲージ対称性を破るゲージ場の質量項は古典的 $(g_5\langle\sigma\rangle)$ に現れるが，これに (図 4.2–2) 以下の π 粒子の寄与による量子揺らぎを加えて見よう．加える項は

$$
(\text{図 } 4.2\text{–}2)' + (\text{図 } 4.2\text{–}3)' + \cdots
$$

$$= \left(\frac{-ig_5}{\hbar}\right)^2 \frac{\hbar}{2ig} J_{PA}(q)^\mu J_{PA}(q)^\nu \times \frac{-1}{q^2 I(q)}$$
$$= -\left(\frac{-ig_5}{\hbar}\right)^2 \frac{\hbar}{2ig}(2mc)^2 \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} I(q) \tag{4.395}$$

である．得られた (4.395) を (4.391) に加え合わせて見ると

$$(\text{図 } 4.2)' = J_{AA}(q)^{\mu\nu} = \left(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu\right) \times \left\{\Pi_V(q) + \frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar}\right)(2g_5 mc)^2 \frac{1}{q^2} I(q)/g\right\} \tag{4.396}$$

となってゲージ不変性は壊れない．即ち作用におけるゲージ場に関する 2 次の項は，量子揺らぎを取り入れると対称性が自発的に破れた後も

$$\int d^4x \, \frac{1}{2} A_\mu(x) \, \left(g^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu\right) \Pi(\partial^2) \, A_\nu(x) \tag{4.397}$$

という横波の形を保つので，ゲージ対称性 $A_{5\mu}(x) \Rightarrow A_{5\mu}(x) - \frac{\hbar}{g}\partial_\mu\theta_5(x)$ は決して破れない．これがマイスナー効果に対する南部の理解である．質量ゼロの π 粒子がゲージボソンの縦波成分を補ってゲージ不変性を回復させているのである．このことは後半の素粒子の標準模型の説明において再び現れるだろう．

以上で対称性の自発的破れにおける質量ゼロの π 粒子の働きを説明できた．今日この π 粒子は南部–ゴールドストーン粒子と呼ばれている．ゴールドストーンの名があるのは，彼が南部理論を $\sigma(x)$ と $\pi(x)$ を実部と虚部とする複素スカラー $\phi(x)$ の理論で記述したからである．即ち

$$S_{\text{Goldstone}} = \int d^4x \, \left(\partial_\mu\phi(x)^\dagger\partial^\mu\phi(x) - V_{\text{GL}}(\phi(x)^\dagger\phi(x))\right), \tag{4.398}$$
$$V_{\text{GL}} = A(\phi(x)^\dagger\phi(x)) + B(\phi(x)^\dagger\phi(x))^2. \tag{4.399}$$

ここで $\phi(x) = \sigma(x) + i\pi(x)$ とすると，カイラル対称性からポテンシャルがギンツブルグ–ランダウ型となることは分かる．$\sigma(x)$ が期待値を取った場合

$$\sigma(x) = \sigma + \frac{1}{\sqrt{2}} h(x) \tag{4.400}$$

とすると，対称性が破れる $A < 0$ の場合，ポテンシャルの最低値は中心から半径 $\sigma = \sqrt{-\frac{A}{2B}}$ だけ離れた地点にある．本来ポテシャルは $\sigma(x)^2 + \pi(x)^2$ の関数であるので基底状態（真空）の選び方には不定性がある．今基底状態あるいは真空を $\langle\sigma(x)\rangle = \sigma \neq 0$ で且つ $\langle\pi(x)\rangle = 0$ となる地点を選んだとすれば，

$$S_{\text{Goldstone}} = \int d^4x \, \left\{\frac{1}{2}(i\hbar\partial h(x))^2 + (i\hbar\partial\pi(x))^2 - 2B\sigma^2 h(x)^2 + \cdots\right\}$$

となり，h 粒子の質量は $m_h = 2\sqrt{B}\sigma$ となりゼロでないが，π 粒子の質量はゼロとなる．よく例えられるが，ポテンシャルの形はワインボトル（あるいはメキシコ帽）のような形で，最低値を取る場所は半径が σ の円（ワインボトルの底）である．ワインボトルの底の中心部分は盛り上がっている．エネルギーが

最低の基底状態（真空）を決める方法は一意的ではないが，1つ最低点を選んで基底状態（真空）を決める必要がある．この基底状態（真空）の決め方はギンツブルグ–ランダウと同じである．このときワインボトルの底に添って円運動をする粒子は運動においてエネルギーを消耗しない．これが質量ゼロの π 粒子であり，この粒子がワインの底を円運動することによって，ワインボトルが回転対称性 U(1) 対称性を持つことを保証するのである．従って量子的揺らぎとして π 粒子を取り入れると，対称性が回復する．一方 h はワインの底から壁を登ろうとする粒子であり，その運動においてはエネルギーを消費するので質量を持つ．この h 粒子は現在「ヒッグス粒子（Higgs particle）」と呼ばれるもので，素粒子模型にある同種の粒子は，2012 年に実験によって発見された．その経緯は後半の解説に譲ることにしよう．ヒッグス模型は非相対論的なギンツブルグ–ランダウ模型を相対論的に書き直したものである．われわれにはすでに自明だと思うが，その作用を書いておくと

$$S_{\text{Higgs}} = \int d^4x \;\; \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \left| \left(i\hbar\partial^\mu - \frac{Q}{c}A^\mu(x) \right) \phi(x) \right|^2 - V_{\text{GL}}(\phi^\dagger\phi) \right\}. \tag{4.401}$$

さて南部の対称性の破れの議論をそのまま超伝導の BCS 理論に適用したいのだけれど，実はそれほど簡単ではない．それは BCS 理論が相対論的に不変でないからである．例えば

$$\hat{L}_{\text{BCS}} = i\hbar\gamma^0\partial_0 - \gamma_0\gamma_5\frac{(-i\hbar\boldsymbol{\nabla})^2}{2mc} - \frac{\Delta}{c} \tag{4.402}$$

であり，カレントは

$$j_5(x)^0 = \overline{\psi}(x)\gamma^0\gamma_5\psi(x), \tag{4.403}$$

$$\boldsymbol{j}_5(x) = \frac{i\hbar}{2mc}\overline{\psi}(x)\gamma^0(\overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}} - \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}})\psi(x) \tag{4.404}$$

であり，エネルギーギャプ Δ があるときには保存則は運動方程式を用いると

$$\partial_\mu j_5^\mu(x) = \frac{2\Delta}{i\hbar c}\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) \tag{4.405}$$

のように破れる．ここでも記号 $j_5(x)$ を使ったが，BCS に適用した場合には通常の電磁カレントである．先ほどと同じようにして BCS 理論の場合にも，量子揺らぎを含めると「対称性」（この場合は電荷によるゲージ対称性）が回復することを示すことができる．それは南部が 1959 年に実行したことである[8]．しかしながら相対論的不変性がないので，計算するには相当の熟練を必要とする．通常の力学よりも相対性理論を使った方が難しいと考える読者が多いかもしれないが，実は逆であって，相対論を用いて計算することは相対論を用いずに計算するよりずっと易しいのである．従ってこれ以上深入りしないことにする．

どうやら新しい発見をするためには，重要であるけれどとてつもなく難しい問題に挑戦する必要があるようだ．南部が 2 年間挑戦し続けた問題（BCS 理論のゲージ対称性の問題）がそれであり，それを解決した論文が [8] である．困難を解決した時点で，新しい発見（素粒子の質量生成を始めとする対称性の自発的破れの一般論）は自明のことであったに違いない．従ってこの 1959 年の論文[8]が鍵であり，ここに全てのことが書かれている．

ゲージ対称性を保証するのは WI である．これをファインマン図を用いて図形的に書き下すと，摂動の全次数においてファインマン図のゲージ不変な組を作って，自己無撞着に質量を決定すること，紫外発散の消去（くりこみ理論)[13]，あるいは赤外発散の相殺やカイラルアノマリーの計算[14]等を行うことができる．今回初めて気付いたのであるが，このように WI を使う方法の源流は南部にあった．

第 5 章
ゲージ対称性

素粒子物理における最も重要な対称性はゲージ対称性である．この章では素粒子標準模型を扱う準備段階としてゲージ理論の構造を始めとする予備的な事柄について紹介する．

5.1 準備

5.1.1 自然単位系

素粒子物理学が立脚しているのは相対論的場の理論であり，それは特殊相対性理論と量子力学の二つを土台とする．特殊相対性理論および量子力学で現れる代表的な基本定数は光速度 c およびプランク定数 h である．ただしプランク定数 h を 2π で割ったものがより多く用いられ，これを換算プランク定数と呼んでいる：

$$c = 2.998\cdots \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}, \tag{5.1}$$

$$\hbar = 1.055\cdots \times 10^{-34}\,\mathrm{J\ s} = 6.582\cdots \times 10^{-22}\,\mathrm{MeV\ s}. \tag{5.2}$$

ここで $1\,\mathrm{eV} = 1.602\cdots \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$ である．(5.2) から明らかなように（換算）プランク定数の次元はエネルギーと時間の積である．

自然単位系では光速度 c と換算プランク定数 $\hbar$ を無次元化し，

$$c = \hbar = 1 \tag{5.3}$$

と置く．エネルギー E は質量 m，運動量 $\boldsymbol{p}$ と $E^2 = (mc^2)^2 + (\boldsymbol{p}c)^2$ という関係にあるので，光速度 $c = 1$ を採用すると質量，運動量，エネルギーが共通の次元を持つことになる．また光速度が無次元になるので長さと時間の次元が等しくなる．またプランク定数が無次元ということはエネルギーと時間が互いに逆の次元になる．従って自然単位系では物理量の単位を共通化することができ，それをエネルギー (eV) に選ぶ．

表 5.1 自然単位系での質量，長さ，時間，面積の単位換算のまとめ．ここで $1\,\mathrm{fm} = 10^{-15}\,\mathrm{m}$ である．

質量	$1\,\mathrm{kg} = 5.61 \times 10^{26}\,\mathrm{GeV}$	$1\,\mathrm{GeV} = 1.78 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
長さ	$1\,\mathrm{m} = 5.07 \times 10^{15}\,\mathrm{GeV}^{-1}$	$1\,\mathrm{GeV}^{-1} = 0.197 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$
時間	$1\,\mathrm{s} = 1.52 \times 10^{24}\,\mathrm{GeV}^{-1}$	$1\,\mathrm{GeV}^{-1} = 6.58 \times 10^{25}\,\mathrm{s}$
面積	$1\,\mathrm{b}\ (\mathrm{barn}) = (10\,\mathrm{fm})^2 = (50.7\,\mathrm{GeV}^{-1})^2$	$1\,\mathrm{GeV}^{-2} = 0.389\,\mathrm{mb}$

単位換算の際に覚えておくと便利な数値として換算プランク定数と光速度の積がある：

$$\hbar c = 197\,\mathrm{MeV\ fm}, \tag{5.4}$$

ここで $1\,\mathrm{MeV} = 10^6\,\mathrm{eV}$, $1\,\mathrm{fm} = 10^{-15}\,\mathrm{m}$ である．いくつかの基本的な物理量の単位を自然単位系でのものに換算したまとめを表 5.1 に与える．素粒子の反応の起き易さを散乱断面積で表すが，その単位として b（barn, バーン）が採用される．1 b は $10^{-28}\,\mathrm{m}^2 = (10\,\mathrm{fm})^2$ である．

以下では素粒子の質量も eV で表す．陽子や中性子，電子の質量はそれぞれ

$$m_p = 1.673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 938\,\mathrm{MeV}, \tag{5.5}$$

$$m_n = 1.675 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 940\,\mathrm{MeV}, \tag{5.6}$$

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 0.511\,\mathrm{MeV}, \tag{5.7}$$

となる．

5.1.2 特殊相対論

2 つの慣性系 $S(x, y, z, t)$ と $S'(x', y', z', t')$ を考え，図のように S 系に対して S' 系が x 方向に一定の相対速度 V で進んでいるとしよう．このとき両系の時空座標 (x, y, z, t) と (x', y', z', t') の間に成り立つ次の関係をローレンツ変換という：

$$ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{5.8}$$

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{5.9}$$

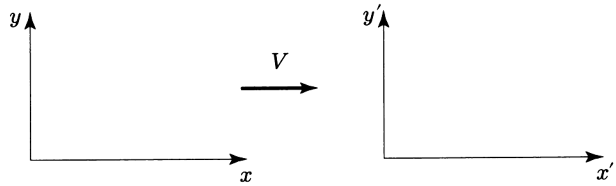


図 5.1

次の関係式はローレンツ変換に対して不変であることが直ぐに確かめられる：

$$(ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2). \tag{5.10}$$

この不変量は反変ベクトル x^μ と共変ベクトル x_μ

$$x^\mu = (ct, \boldsymbol{x}), \quad x_\mu = (ct, -\boldsymbol{x}) \tag{5.11}$$

を用いて

$$x^2 = x^\mu x_\mu = (ct)^2 - \boldsymbol{x}^2 \tag{5.12}$$

と表される．反変ベクトルと共変ベクトルをまとめて 4 元ベクトルという．ここでは x^μ について述べたが，一般に 4 元ベクトルの内積は反変ベクトルと共変ベクトルの積で定義され，それはローレンツ不変量である．

ある物体のエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ から 4 元運動量 p^μ が構成される*1)：

$$p^\mu = (E, \boldsymbol{p}), \quad p_\mu = (E, -\boldsymbol{p}). \tag{5.13}$$

4 元運動量の内積は不変量であるので S 系の 4 元運動量 $p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$ と S' 系の 4 元運動量 $(E', \boldsymbol{p}')$ の間に次の関係が成り立つ：

$$p^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2 = E'^2 - \boldsymbol{p}'^2 = p'^2. \tag{5.14}$$

今 S' 系では物体は静止しているとしよう．つまり $E' = m$, $\boldsymbol{p}' = 0$ である．このとき次の関係が得られる：

$$E^2 = m^2 + \boldsymbol{p}^2. \tag{5.15}$$

式 (5.15) を相対論的エネルギー運動量の関係式という．式 (5.15) を用いると 4 元運動量の内積は

$$p^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2 = (m^2 + \boldsymbol{p}^2) - \boldsymbol{p}^2 = m^2 \tag{5.16}$$

となる．つまり 4 元運動量の内積は質量の二乗となる．

素粒子の散乱や衝突において 4 元運動量は保存される．始状態の粒子 1, 2 が衝突し，終状態に粒子 3, 4 が現れたとしよう．これらの 4 元運動量を p_i ($i = 1 \sim 4$) とする．このとき

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \tag{5.17}$$

が成り立つ．両辺を二乗したものは相対論的不変量であり，しばしば s という変数で表される：

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2. \tag{5.18}$$

---

*1) 自然単位系を用いて $c = 1$ としている．

始状態の 2 つの粒子の 3 次元運動量和がゼロとなるような系を重心系という．このとき 4 元運動量は

$$p_1^\mu = (E_1, \boldsymbol{p}), \quad p_2^\mu = (E_2, -\boldsymbol{p}), \tag{5.19}$$

なので不変量 s は

$$s = (E_1 + E_2)^2 \tag{5.20}$$

となる．$\sqrt{s}$ を重心系のエネルギーという．もし始状態が同種粒子もしくは（電子・陽電子など）粒子・反粒子対の場合，$E_1 = E_2$ なので

$$\sqrt{s} = 2E \tag{5.21}$$

となり，衝突する 2 つの粒子が重心系エネルギーの半分 ($E = \frac{\sqrt{s}}{2}$) ずつを担っていることになる．

4 元運動量の内積は相対論的不変量であり，また質量の二乗に等しいので，2 つの粒子の 4 元運動量和の二乗で作られる次の量 $\sqrt{(p_1 + p_2)^2}$ を不変質量と呼ぶことがある．もし 4 元運動量 q を持つ粒子 A が運動量 p_1, p_2 の 2 つの粒子に崩壊した場合，運動量保存則は $q = p_1 + p_2$ となるが両辺を二乗すると

$$q^2 = (p_1 + p_2)^2 \tag{5.22}$$

となり，左辺は粒子 A の質量の二乗に等しい．

5.2 おさらい：マクスウェル方程式のゲージ不変性

本書においてゲージ対称性という言葉は第 3 章で電磁場の運動を記述するマクスウェル方程式を紹介した際に出てきた．少しおさらいをしておこう．マクスウェル方程式は電場 $\boldsymbol{E}$，磁場 $\boldsymbol{B}$ が満たす次の 4 つの方程式のことである：

$$\boldsymbol{\nabla E} = \rho, \tag{5.23}$$

$$\boldsymbol{\nabla B} = 0, \tag{5.24}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \tag{5.25}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j}, \tag{5.26}$$

ここで $\rho, \boldsymbol{j}$ はそれぞれ電荷密度および電流密度である．電場および磁場はスカラーポテンシャル ϕ およびベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ で次のように表される：

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi, \tag{5.27}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}. \tag{5.28}$$

つまり ϕ と $\boldsymbol{A}$ は電場，磁場と同等なのでマクスウェル方程式を $\phi, \boldsymbol{A}$ で表すこ

ともできる．4 元ベクトルポテンシャルと 4 元カレント

$$A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A}), \quad j^\mu = (\rho, \boldsymbol{j}), \tag{5.29}$$

を用いてマクスウェル方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0, \tag{5.30}$$

と表される．ただしここで

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{5.31}$$

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{5.32}$$

である．さて，$\phi, \boldsymbol{A}$ に対して任意のスカラー関数 $\alpha(x)$ による次のような変換

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{5.33}$$

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\alpha, \tag{5.34}$$

をゲージ変換と呼び，これに対して (5.27) および (5.28) が不変であることから電磁気理論はゲージ不変性（ゲージ対称性）を持っていることは第 3 章ですでに紹介したところである．相対論の枠組みではゲージ変換 (5.33), (5.34) は

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha \tag{5.35}$$

と表される．この変換に対して (5.31) は

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu (A_\nu - \partial_\nu \alpha) - \partial_\nu (A_\mu - \partial_\mu \alpha) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ &= F_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{5.36}$$

となり，不変である．次節での議論のため，第 4 章で与えた電磁場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu, \tag{5.37}$$

であったことを思い出そう．自由電磁場の場合，即ち電磁場 A_μ と 4 元カレント j_μ の相互作用（右辺第 2 項）が存在しない場合，電磁場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{5.38}$$

となり，これは (5.36) によってゲージ変換 (5.35) の下で不変であることが示される．

5.3 電子のラグランジアンとゲージ不変性

質量 m，スピン $\frac{1}{2}$ を持つ自由ディラック場 ψ（例えば電子）のラグランジア

ンは

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi \tag{5.39}$$

で与えられる．ここで $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ である．右辺は第 1，2 項ともにディラック場の 2 次で与えられている．このとき，第 1 項のように微分を含む項を「運動項」，第 2 項のように微分を含まない項を「質量項」という．この呼び方はスピン 0，スピン 1 の場に対するラグランジアンでも同様である．

さて，このラグランジアン (5.39) はどのような対称性を持つだろうか．次のような定数の位相 α を持つ因子 $e^{i\alpha}$ による ψ の変換（位相変換）

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi, \quad \overline{\psi} \to \overline{\psi}' = e^{-i\alpha}\overline{\psi}, \tag{5.40}$$

を考えてみよう．ラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \to \mathcal{L}' &= i\overline{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\overline{\psi}'\psi' \\ &= i\left(e^{-i\alpha}\overline{\psi}\right)\gamma^\mu\partial_\mu\left(e^{i\alpha}\psi\right) - m\left(e^{-i\alpha}\overline{\psi}\right)\left(e^{i\alpha}\psi\right)\end{aligned} \tag{5.41}$$

となるが，右辺第 1 項は α が定数であるため

$$i\left(e^{-i\alpha}\overline{\psi}\right)\gamma^\mu\partial_\mu\left(e^{i\alpha}\psi\right) = i\left(e^{-i\alpha}\overline{\psi}\right)\gamma^\mu\left(e^{i\alpha}\partial_\mu\psi\right) \tag{5.42}$$

となって第 2 項と同様に位相因子がキャンセルするので，

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \tag{5.43}$$

となり，ラグランジアンが位相変換不変性を持つことが示される．

次に位相因子 α が時空座標に依存する場合 $(\alpha = \alpha(x))$ を考えてみよう：

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi, \quad \overline{\psi} \to \overline{\psi}' = e^{-i\alpha(x)}\overline{\psi}. \tag{5.44}$$

このような変換を局所的位相変換と呼ぶ．ラグランジアン (5.39) の右辺第 2 項（質量項）は α が局所的であろうとも $\overline{\psi}$ と ψ の間でキャンセルするので変換 (5.44) によって変わらない．第 1 項（運動項）はどうだろうか．α が定数のときは (5.42) で見たように微分項 $\partial_\mu\psi'$ が $e^{i\alpha}\partial_\mu\psi$ と変換されるため，位相同士がキャンセルしていた．しかし今度は $\alpha = \alpha(x)$ なので微分項は

$$\partial_\mu\psi' = \partial_\mu\left(e^{i\alpha}\psi\right) = i(\partial_\mu\alpha)e^{i\alpha}\psi + e^{i\alpha}\partial_\mu\psi \neq e^{i\alpha}\partial_\mu\psi \tag{5.45}$$

となり，(5.42) のような位相因子の相殺は起こらず，ラグランジアンは不変性を持たない．

ここで見方を変えて，(5.44) という変換の下での不変性をディラック場のラグランジアン (5.39) に要請し，そのために必要な，ラグランジアンに対する変更を考えてみよう．局所的位相変換に対する不変性を破っていたのは (5.39) の運動項であったので，微分項 $\partial_\mu\psi$ の適切な修正が必要であろう．修正された

微分項（$D_\mu\psi$ と表す）は $\overline{\psi}$ の変換により出てくる位相因子を打ち消すように

$$(D_\mu\psi)' = e^{i\alpha(x)}\left(D_\mu\psi\right) \tag{5.46}$$

と変換することが求められる．ローレンツ不変性より D_μ は元の微分演算子 ∂_μ 同様，4 元ベクトルとして変換することが求められる．そのため，微分演算子と 4 元ベクトルとして変換する場 $A_\mu(x)$ との線形結合で D_μ を定義する：

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iA_\mu, \tag{5.47}$$

このように定義された D_μ を共変微分と呼ぶ．これが (5.46) を満たすよう，A_μ の変換性を調べる．共変微分の項 $D_\mu\psi$ の変換は

$$\begin{aligned}(D_\mu\psi)' &= \left(\partial_\mu + iA'_\mu\right)\psi' \\ &= \left\{i(\partial_\mu\alpha)e^{i\alpha}\psi + e^{i\alpha}\left(\partial_\mu\psi\right)\right\} + iA'_\mu\left(e^{i\alpha}\psi\right) \\ &= e^{i\alpha}\left\{i(\partial_\mu\alpha)\psi + \partial_\mu\psi + iA'_\mu\psi\right\}\end{aligned} \tag{5.48}$$

となる．これが (5.46) の右辺

$$e^{i\alpha}\left(D_\mu\psi\right) = e^{i\alpha}\left\{\partial_\mu\psi + iA_\mu\psi\right\} \tag{5.49}$$

に一致するためにはベクトル場 A_μ が

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\alpha \tag{5.50}$$

と変換すればよいことが分かる．これは前節で示した電磁場に対するゲージ変換 (5.35) そのものである．つまり (5.47) で導入したベクトル場 A_μ はその時間および空間成分が

$$A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A}) \tag{5.51}$$

のようにスカラーポテンシャル，ベクトルポテンシャルで構成されている電磁場と同等のものと考えてよい．ゲージ変換 (5.50) に従うベクトル場をゲージ場と呼ぶ．

自由ディラック場のみで与えられていたラグランジアン (5.39) は運動項の微分演算子を共変微分 (5.47) に置き換えることにより，局所位相変換の下で不変になった．運動項に注目すると

$$\begin{aligned}i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi &= i\overline{\psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu + iA_\mu\right)\psi \\ &= i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\end{aligned} \tag{5.52}$$

となり，右辺 2 行目の第 1 項はディラック場の運動項，第 2 項はディラック場とベクトル場の相互作用を表す．つまり自由ディラック場（相互作用の無い場）のラグランジアンに局所的位相変換不変性を要請するとゲージ変換 (5.35) に従

うゲージ場 A_μ が導入され，ディラック場はもはや「自由」ではなく，ゲージ場と相互作用せざるを得なくなる．このようにディラック場の局所的位相変換に対するラグランジアンの不変性はディラック場とゲージ場との共存を意味するので，以降，局所的位相変換 (5.44) をディラック場に対するゲージ変換と呼ぶ．

さて，ゲージ場 A_μ を電磁場と考えてみよう．電子と電磁場との相互作用の強さは，クーロン力やローレンツ力で知られるように電子の電荷 $-e$ で与えられる．ここで素電荷 e を電磁相互作用の結合定数と呼び，荷電粒子の電荷を e を単位として Q（電子なら $Q=-1$）で表すことにする．ラグランジアンにおいて電荷 Q のディラック場と電磁場の相互作用を適切に表すために共変微分 (5.47) の電磁場 A_μ を次にように Qe 倍する：

$$D_\mu = \partial_\mu + iQeA_\mu. \tag{5.53}$$

これに伴い，ψ と A_μ の変換性 (5.40), (5.50) を

$$\psi \to \psi' = e^{iQ\alpha}\psi, \quad A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \tag{5.54}$$

とすると，任意の電荷 Q を持つディラック場 ψ と電磁場の相互作用がゲージ不変性より定まることになる．

最初のラグランジアン (5.39) は共変微分を導入することによりゲージ変換の下で不変なラグランジアンとなったが，電磁場 A_μ の運動項（微分を含む A_μ の 2 次の項）がない．すでに見たように自由電磁場のラグランジアン (5.38)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

はゲージ不変なため，これを加えて

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - eQ\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \end{aligned}\tag{5.55}$$

を得る．電磁気学では場の強さテンソル $F_{\mu\nu}$ はマクスウェル方程式と電場，磁場との関係を満たすように定義されたが，ゲージ理論では共変微分 D_μ の交換関係を用いて次のように定義される：

$$[D_\mu, D_\nu]\psi \equiv ieQF_{\mu\nu}\psi. \tag{5.56}$$

実際に，D_μ の具体的な形 (5.53) を用いると

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu]\psi &= [\partial_\mu, \partial_\nu]\psi + ieQ[\partial_\mu, A_\nu]\psi + ieQ[A_\mu, \partial_\nu]\psi + (ieQ)^2[A_\mu, A_\nu]\psi \\ &= ieQ\left\{[\partial_\mu, A_\nu] - [\partial_\nu, A_\mu]\right\}\psi \\ &= ieQ\left\{(\partial_\mu A_\nu)\psi - (\partial_\nu A_\mu)\psi\right\} \\ &= ieQF_{\mu\nu}\psi \end{aligned}\tag{5.57}$$

となることが確認できる．これより共変微分および場の強さテンソルの幾何学的意味が明確になるが本稿ではこれ以上立ち入らない．

ラグランジアン (5.55) で表される，電荷 Q を持つディラック場 ψ と電磁場 A_μ の相互作用を記述するゲージ理論を QED（Quantum Electro Dynamics, 量子電気力学）という．QED のラグランジアンに電子の質量項 $m\overline{\psi}\psi$ はあるが，電磁場の質量項（微分を含まない場 A_μ の 2 次の項）がないのは何故だろう．もちろん我々は特殊相対性理論より光速で伝搬できる粒子は質量がゼロであるということを知っている．しかしここではゲージ不変性の立場から考えてみよう．電磁場が質量 m_A を持つならば，ラグランジアンに質量項

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu \tag{5.58}$$

が加わる．しかし (5.58) はゲージ変換 (5.54) の下で

$$m_A^2 A'_\mu A'^\mu = m_A^2 \left(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha \right) \left(A^\mu - \frac{1}{e}\partial^\mu \alpha \right) \neq m_A^2 A_\mu A^\mu \tag{5.59}$$

となるため，ゲージ不変性を破ってしまう．このようにゲージ理論では，電磁場（ゲージ場）はゲージ対称性によって質量を持つことが禁じられる．

質量 m を持つスピン 0 の粒子はスカラー場と呼ばれる．自由スカラー場のゲージ不変なラグランジアンについて考えてみよう．ゲージ変換は局所的位相変換なのでスカラー場は複素数の場でなければならない．それを複素スカラー場 ϕ と表すとその自由ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \tag{5.60}$$

で与えられる．スカラー場のゲージ変換を

$$\phi \to \phi' = e^{i\alpha}\phi, \quad \phi^* \to \phi'^* = e^{-i\alpha}\phi^*, \quad \alpha = \alpha(x), \tag{5.61}$$

とすると，(5.60) の右辺第 1 項が不変性を破る．しかしディラック場のとき同様，微分演算子を共変微分 D_μ (5.53) で置き換えれば

$$(D_\mu \phi)' = e^{i\alpha} (D_\mu \phi), \quad (D_\mu \phi)'^* = e^{-i\alpha} (D_\mu \phi)^* \tag{5.62}$$

となるため，位相因子 α はキャンセルし，ゲージ不変性が満たされる．従ってスカラー場のゲージ不変なラグランジアンは

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \tag{5.63}$$

で与えられる．

ここまでは，ディラック場およびスカラー場のゲージ変換は

$$\psi' = U\psi, \quad \phi' = U\phi, \quad U = e^{i\alpha} \tag{5.64}$$

と与えられていた．ここで U は位相因子であり，ただの数であった．次節で

は ψ や ϕ が多成分であり，U による変換がそれらの成分を入れ替える（混ぜる）ようなもの，即ち行列であった場合について考察する．

5.4 SU(N) ゲージ理論

ディラック場 ψ の局所位相変換 (5.64) を N 行 N 列（以下 $N \times N$ と表す）のユニタリ行列 U による変換へと拡張しよう*2)：

$$\begin{aligned} &\psi \to \psi' = U\psi, \\ &\overline{\psi} \to \overline{\psi}' = \overline{\psi}U^{\dagger}. \end{aligned} \tag{5.65}$$

この拡張に伴い，ψ も N 成分を持つベクトルとする：

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}. \tag{5.66}$$

$N \times N$ のユニタリ行列は

$$U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = I, \quad U^{\dagger} = U^{-1} \tag{5.67}$$

を満たす．ここで I は単位行列である．式 (5.65) で与えられる変換を U(N) 変換といい，条件 (5.67) を満たすユニタリ行列の全体をユニタリ群という．更に行列 U の行列式が $\det U = +1$ を満たす場合，SU(N)（special unitary: 特殊ユニタリ）変換，SU(N) 群と呼ぶ．また N 個の成分を持つベクトル ψ (5.66) は SU(N) の N 重項と呼ばれる．

行列 U を指数関数を用いて

$$U = e^{iT^a\theta^a}, \tag{5.68}$$

と表すことができる．ここで θ^a は実パラメータであり，行列 T^a は群の生成子（generator）と呼ばれ，次の交換関係

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \tag{5.69}$$

を満たす．右辺の f^{abc} は群の構造定数と呼ばれ，添字 a, b, c の入れ替えに関して完全反対称である．

U がユニタリ行列であることから群の生成子 T^a はエルミート行列であることが次のように示される：

---

*2) 以下の議論はディラック場の代わりにスカラー場 ϕ の場合でも同様である．

$$U^\dagger = U^{-1} \text{ より } e^{-i(T^a)^\dagger \theta^a} = e^{-iT^a\theta^a}, \quad \to \ (T^a)^\dagger = T^a. \tag{5.70}$$

またすでに述べたように SU(N) の場合は U の行列式が 1 という条件が加わるが，これは生成子 T^a に対する

$$\det U = e^{i\mathrm{Tr}(T^a)\theta^a} = 1, \quad \to \ \mathrm{Tr}(T^a) = 0, \tag{5.71}$$

というトレースレス（トレースが 0）条件になる．

行列 U の独立成分（独立に定めなくてはならない行列要素の数）を調べよう．$N \times N$ ユニタリ行列に対してユニタリ条件 $U^\dagger U = I$ は行列要素間に関する N^2 個の条件となる．一般の $N \times N$ 複素行列の独立成分は実数部，虚数部あわせて $2N^2$ 個なので，$N \times N$ ユニタリ行列の独立成分は $2N^2 - N^2 = N^2$ 個である．また SU(N) の場合，更に $\det U = 1$ という条件が加わるため U の独立成分の数，もしくは群の生成子 T^a の数は $N^2 - 1$ 個となる．

行列 U によるゲージ変換のもとで不変な理論をゲージ理論と呼ぶ．$N = 1$ (U(1) 群) の場合，生成子 T^a は行列ではなく単なる数であり，交換関係 (5.69) は 0 である（もしくは構造定数が 0 といってもよい）．このような場合の群をアーベリアンと呼ぶ．前節で扱った QED は U(1) ゲージ理論の一例である．一方で N が 2 以上では生成子は非可換となるため，SU(N) ($N \geq 2$) ゲージ理論を非可換ゲージ理論（もしくは non-Abelian ゲージ理論）と呼ぶ．SU(N) ゲージ理論では次のような生成子の規格化が採用される：

$$\mathrm{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}. \tag{5.72}$$

$N = 2$ の場合，生成子はパウリ行列 σ^a を用いて

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2} \quad (a = 1, 2, 3), \tag{5.73}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.74}$$

で与えられる．また $N = 3$ の場合はゲルマン（Gell-Mann）行列 λ^a ($a = 1$〜8) を用いて次のように与えられる．

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2} \quad (a = 1 \sim 8), \tag{5.75}$$

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.76}$$
$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

次に SU(N) 不変性を持つラグランジアンについて考えよう．SU(N) ゲージ変換での共変微分 (5.53) は前節まで議論してきた QED での共変微分を一般化し，

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^a A^a_\mu \tag{5.77}$$

と表される．右辺の g をゲージ結合定数と呼ぶ．また T^a は SU(N) 群の生成子，A^a_μ は SU(N) ゲージ場であり，$a = 1 \sim N^2 - 1$ である．SU(N) の N 重項であるディラック場 ψ，複素スカラー場 ϕ のゲージ変換は

$$\psi' = U\psi, \quad \phi' = U\phi \tag{5.78}$$

であるが，ψ のディラック共役 $\overline{\psi}$，また ϕ のエルミート共役 $\phi^\dagger$ のゲージ変換は

$$\overline{\psi}' = \psi U^\dagger, \quad \phi'^\dagger = \phi^\dagger U^\dagger \tag{5.79}$$

となる．従ってディラック場，スカラー場の運動項

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi + (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi \tag{5.80}$$

がゲージ不変となるためには共変微分が

$$(D_\mu\psi) \to (D_\mu\psi)' = U(D_\mu\psi), \quad (D_\mu\phi) \to (D_\mu\phi)' = U(D_\mu\phi), \tag{5.81}$$

と変換すればよい．一方，$\psi' = U\psi$ などより (5.81) が成り立つためには共変微分自身のゲージ変換が

$$D'_\mu = UD_\mu U^{-1} \tag{5.82}$$

となるべきである．ゲージ場の強さの定義 (5.56) に従い，共変微分同士の交換関係を作ってみると

$$
\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu]\psi &= [\partial_\mu, \partial_\nu]\psi + igT^a[\partial_\mu, A^a_\nu]\psi \\
&\qquad - igT^a[\partial_\nu, A^a_\mu]\psi - g^2[T^a, T^b]A^a_\mu A^b_\nu\psi \\
&= igT^a(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)\psi - g^2 if^{abc}T^c A^a_\mu A^b_\nu\psi
\end{aligned}
\tag{5.83}
$$

となる．ここで生成子の交換関係 (5.69) を用いた．構造定数 f^{abc} の完全反対称性を用いて

$$
f^{abc}T^c A^a_\mu A^b_\nu = f^{abc}T^a A^b_\mu A^c_\nu \tag{5.84}
$$

と書き直し，(5.83) の右辺を (5.56) に従って

$$
[D_\mu, D_\nu]\psi = igT^a F^a_{\mu\nu}\psi \tag{5.85}
$$

とすると場の強さテンソルは

$$
F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{5.86}
$$

となる．すでに見たように，U(1) 群の場合は $f^{abc} = 0$ より右辺第 3 項を 0 と置く．

ゲージ場 A^a_μ のゲージ変換はどうなるだろうか．先ず式 (5.81) より

$$
(\partial_\mu + igT^a A'^a_\mu)U\psi = U(\partial_\mu + igT^a A^a_\mu)\psi \tag{5.87}
$$

なので

$$
(\partial_\mu U)\psi + igT^a A'^a_\mu U\psi = igUT^a A^a_\mu\psi \tag{5.88}
$$

となり，ゲージ場と生成子の積 $T^a A^a_\mu$ は

$$
T^a A'^a_\mu = U(T^a A^a_\mu)U^{-1} + \frac{i}{g}\partial_\mu U \cdot U^{-1} \tag{5.89}
$$

と変換することが分かる．ゲージ場 A^a_μ の変換性は無限小変換

$$
U \simeq 1 + iT^a\theta^a \tag{5.90}
$$

によって (5.89) の両辺を展開して θ の 2 次以上の項を無視し，T^a でまとめると

$$
A'^a_\mu = A^a_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a + f^{abc}A^b_\mu\theta^c \tag{5.91}
$$

となることが分かる．

U(1) ゲージ理論の場合，ゲージ場の強さテンソル $F_{\mu\nu}$ はゲージ不変，つまり $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$ であった．SU(N) の場合はどうだろうか．式 (5.86) と (5.91) の比較により，U(1) の場合とは異なり $F^a_{\mu\nu}$ はゲージ不変ではないことが分かる．共変微分の交換関係 $[D_\mu, D_\nu]$ に対するゲージ変換は (5.82) より

$$
([D_\mu, D_\nu])' = U[D_\mu, D_\nu]U^{-1} \tag{5.92}
$$

となる．従って $[D_\mu, D_\nu]$ を二乗してトレースを取ったものは，ローレンツ不変かつゲージ不変であることが分かる：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left\{[D_\mu, D_\nu][D^\mu, D^\nu]\right\} &\to \left(\mathrm{Tr}\left\{[D_\mu, D_\nu][D^\mu, D^\nu]\right\}\right)' \\
&= \mathrm{Tr}\left\{U[D_\mu, D_\nu]U^{-1}U[D^\mu, D^\nu]U^{-1}\right\} \\
&= \mathrm{Tr}\left\{[D_\mu, D_\nu][D^\mu, D^\nu]\right\}. \qquad (5.93)
\end{aligned}
$$

従って (5.93) を適当に規格化することで，SU(N) ゲージ理論ではゲージ場の強さテンソル $F^a_{\mu\nu}$ はゲージ不変ではないものの，ゲージ場の運動項はゲージ不変であることが分かる：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left\{[D_\mu, D_\nu][D^\mu, D^\nu]\right\} \\
&= \frac{1}{2g^2}(-g^2)\mathrm{Tr}(T^a T^b)F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu}. \qquad (5.94)
\end{aligned}
$$

ここで (5.85) および (5.72) を用いた．

最後に SU(N) ゲージ不変性を持つラグランジアンをまとめておく．SU(N) の N 重項であるディラック場 ψ と複素スカラー場 ϕ から構成されるゲージ不変なラグランジアンは次式で与えられる：

$$
\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi + |D_\mu\phi|^2 - M^2|\phi|^2 - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{b\,\mu\nu}, \qquad (5.95)
$$

$$
D_\mu = \partial_\mu + igT^a A^a_\mu, \qquad (5.96)
$$

$$
F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu. \qquad (5.97)
$$

ここでディラック場 ψ の質量を m，複素スカラー場 ϕ の質量を M とした．QED の場合と同様，ゲージ場 A^a_μ の質量項はゲージ不変性によって禁止されている．また生成子の数とゲージ場の数は等しい．

5.5 相互作用ラグランジアンとファインマン・ルール

ラグランジアンが与えられた場合，相互作用を表すファインマン・ルールを見出すのは容易である．例として QED のラグランジアンを取り上げよう：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - m\overline{\psi}\psi. \qquad (5.98)
\end{aligned}
$$

ここで相互作用を表すのは 2 行目第 3 項である．相互作用バーテックスに関するファインマン・ルールはラグランジアン全体にある相互作用項の場 $\overline{\psi}, \psi, A_\mu$ を「もいで」残った部分に虚数 i をかけたものである．

即ち $-ie\gamma^\mu$ というのが電子 2 つと光子が相互作用する場合のファインマン・

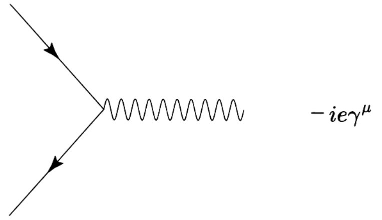


図 5.2

ルールであり，それを図 5.2 のように表す．この図の 2 つの実線と波線にはそれぞれ「もいだ」場*3)を表すファインマン・ルールが適用される．ラグランジアン (5.98) の他の項は場の 2 次からなり，それはプロパゲータを与えるが第 4 章ですでに触れたので繰り返さない．

あるときには相互作用項が微分を含む場合がある．例えば電磁相互作用するスカラー場のラグランジアンは (5.63) に与えたが，共変微分の項を展開すると

$$
\begin{aligned}
|D_\mu\phi|^2 &= |\partial_\mu\phi|^2 + (\partial_\mu\phi)^*(ieA^\mu\phi) + (\partial_\mu\phi)(-ieA^\mu\phi^*) + |ieA_\mu\phi|^2 \\
&= |\partial_\mu\phi|^2 - ieA^\mu\{\phi^*(\partial_\mu\phi) - (\partial_\mu\phi^*)\phi\} + |ieA_\mu\phi|^2 \qquad (5.99)
\end{aligned}
$$

となる．スカラー場 2 つと光子の相互作用を表す項は第 2 行目の第 2 項だが微分が含まれている．このように微分を含む項のファインマン・ルールについて述べる．相対論的場の理論ではスカラー場 ϕ は粒子および反粒子の成分を持ち，場をフーリエ変換して運動量空間で表すと，運動量を p として正振動モード e^{-ipx} が粒子の消滅に，負振動モード e^{+ipx} が反粒子の生成に対応する．また ϕ^* では生成・消滅の役割が ϕ の場合と入れ替わる（付録 A を参照）．そのため運動量 p を持つスカラー場 ϕ の微分は粒子成分，反粒子成分それぞれ

$$
\partial_\mu\phi \to -ip_\mu\ (\text{粒子}), \qquad \partial_\mu\phi \to +ip_\mu\ (\text{反粒子}), \qquad (5.100)
$$

となる．式 (5.99) の 2 行目第 2 項を，運動量 p を持つスカラー場 ϕ と k を持つスカラー場 $\phi(^*)$ による対消滅と考えると（つまり両者が相互作用点に向かっていく）

$$
\phi^*(\partial_\mu\phi) - (\partial_\mu\phi^*)\phi \to -i(p-k)_\mu \qquad (5.101)
$$

となる．ファインマン・ルール（$i\times\mathcal{L}$）は $ie(k-p)$ となる（図 5.3）．より詳細なファインマン・ルールのまとめを付録 A に与える．

5.6 断面積と崩壊率

素粒子物理学では，素粒子同士の衝突により，ある終状態が現れる反応の起

*3) 外線粒子という．

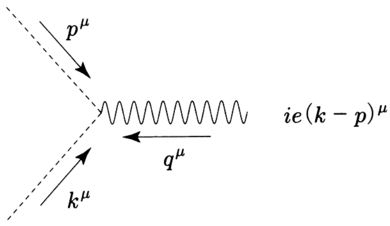


図 5.3

こり易さを「断面積」で表す．断面積の定義は

$$断面積 = \frac{始状態から終状態への遷移確率}{入射フラックス} \cdot 終状態の数 \tag{5.102}$$

であり，断面積が大きいほど反応し易く，断面積が小さければ滅多に反応しない．断面積はその名の通り面積の次元を持つが，しばしば断面積の単位として

$$1\,\mathrm{barn} = (10\,\mathrm{fm})^2 = (50.7\,\mathrm{GeV}^{-1})^2 \tag{5.103}$$

を用いる．

2 つの粒子 A, B の衝突によって終状態に n 個の粒子が現れる断面積 σ はローレンツ不変な散乱振幅 $\mathcal{M}$ を用いて

$$\sigma = \int d\sigma = \int \frac{1}{F}|\mathcal{M}|^2 d\Phi_n, \tag{5.104}$$

$$F = 4\sqrt{(p_A p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}, \tag{5.105}$$

$$d\Phi_n = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{i=1}^{n} p_i) \times \frac{d^3 p_1}{2E_1(2\pi)^3}\frac{d^3 p_2}{2E_2(2\pi)^3}\cdots\frac{d^3 p_n}{2E_n(2\pi)^3} \tag{5.106}$$

で与えられる．ここで p_A, p_B および m_A, m_B は粒子 A, B の 4 元運動量および質量を表す．また p_i および m_i は終状態の粒子 $(1, 2, \cdots, n)$ が持つ 4 元運動量および質量である．式 (5.105) で与えられる F は入射フラックス因子と呼ばれる．また式 (5.106) は終状態に現れる n 個の粒子がそれぞれ運動量 $\boldsymbol{p}_n \sim \boldsymbol{p}_n + d\boldsymbol{p}_n$ に見出される状態数を表し，位相空間（Phase space）と呼ばれる．式 (5.104) の右辺の $d\sigma$ を微分断面積という．

具体例として 2 つの粒子 $1, 2$ が衝突し 2 つの粒子 $3, 4$ が終状態に現れる場合を始状態（粒子 $1, 2$）の重心系で考えよう．重心系では系を構成する粒子の運動量和が 0 である．今の場合，粒子 $1, 2$ の運動量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ が $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{0}$ を満たすので，同一線上を粒子 $1, 2$ が逆向きに正面衝突することになる．これを z 軸とし，粒子 1 の進む方向を正に取る．微分断面積 $d\sigma$ は次のように与えられる：

$$d\sigma = \frac{1}{2s\bar{\beta}\left(1, \frac{m_1^2}{s}, \frac{m_2^2}{s}\right)} |\mathcal{M}|^2 \bar{\beta}\left(1, \frac{m_3^2}{s}, \frac{m_4^2}{s}\right) \frac{1}{8\pi}\frac{d\cos\theta}{2}\frac{d\phi}{2\pi}. \tag{5.107}$$

ここで s は始状態の運動量 p_1, p_2 を用いて $s \equiv (p_1 + p_2)^2$ で与えられ，$\sqrt{s}$ を重心系のエネルギー（衝突エネルギーに等しい）と呼ぶ．粒子の質量は m_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ で与えられる．関数 $\bar{\beta}(a, b, c)$ は

$$\bar{\beta}^2(a, b, c) \equiv a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \tag{5.108}$$

で定義される．また

$$\bar{\beta}\left(1, \frac{m_i^2}{s}, \frac{m_j^2}{s}\right) = \sqrt{1 - 2\left(\frac{m_i^2}{s} + \frac{m_j^2}{s}\right) + \left(\frac{m_i^2}{s} - \frac{m_j^2}{s}\right)}, \tag{5.109}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}, \qquad (m_i = m_j) \tag{5.110}$$

$$= 1, \qquad \left(\frac{m_i^2}{s}, \frac{m_i^2}{s} \leq 1\right) \tag{5.111}$$

である．式 (5.107) で θ, ϕ はそれぞれ終状態の 3 次元運動量が z 軸となす角度（散乱角）および z 軸周りの角度（方位角）であり，積分範囲は

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \tag{5.112}$$

である．

本節の冒頭で，断面積を「反応の起こり易さ」と述べたが，断面積と共に反応の起こる数（イベント数）を決めるのがルミノシティ ($\mathcal{L}$) と呼ばれる量である*4)．ルミノシティは 2 つの粒子ビームが正面衝突する際，単位時間および単位面積あたりにどれだけの数の粒子が存在するか，という指標である．例えば LHC 実験の設計段階でのルミノシティは

$$\mathcal{L} = 10^{34}\,\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1} = 10^{10}\,\mathrm{b}^{-1}\mathrm{s}^{-1} \tag{5.113}$$

である．一方，陽子・陽子衝突断面積の典型的な大きさはおよそ $\sigma \approx 100\,\mathrm{mb}$ なので，

$$10^{10}\,\mathrm{b}^{-1}\mathrm{s}^{-1} \times 100\,\mathrm{mb} = 10^{9}\,\mathrm{s}^{-1} \tag{5.114}$$

となり，LHC では陽子・陽子衝突イベントが 1 秒あたり 10^9 回起きていることになる．

ルミノシティ $\mathcal{L}$ をビーム衝突の実働時間で積分したもの ($\int dt\mathcal{L}$) を積分ルミノシティという．1 年間は大雑把に 3×10^7 秒なので LHC のルミノシティ $\mathcal{L} = 10^{10}\,\mathrm{b}^{-1}\mathrm{s}^{-1}$ は

$$\int dt\mathcal{L} \approx 3 \times 10^2\,\mathrm{fb}^{-1} \tag{5.115}$$

という（年間）積分ルミノシティに相当する．

---

*4) ラグランジアンも同じ記号 $\mathcal{L}$ で表されるが，混同しないように．

粒子 A が n 個の粒子へと崩壊する過程 $(A \to 1+2+\cdots+n)$ の崩壊率 Γ は次のように与えられる：

$$\Gamma(A \to 1+2+\cdots+n) = \int \frac{1}{2m_A}|\mathcal{M}|^2 d\Phi_n. \tag{5.116}$$

ここで m_A は粒子 A の質量である．粒子 A の色々な崩壊先のことを崩壊チャネルという．ある終状態 i への崩壊チャネルの崩壊率を Γ_i と書くとき，全ての可能な崩壊チャネルの崩壊率の和

$$\Gamma \equiv \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i, \tag{5.117}$$

を全崩壊率（もしくは全崩壊幅）と呼ぶ．崩壊率 Γ_i は部分崩壊幅と呼ばれることもある．全崩壊幅 Γ と部分崩壊幅 Γ_i の比を分岐比（Branching ratio）と呼び

$$\mathrm{Br}(A \to i) \equiv \frac{\Gamma_i}{\Gamma} \tag{5.118}$$

で定義する．

素粒子の崩壊は次のように指数関数的崩壊則に従う．時刻 $t=0$ で N_0 個あった素粒子が時間 t だけ経過したときに生き残っている個数 $N(t)$ は

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma t} \tag{5.119}$$

で与えられる．ここで右辺の Γ は全崩壊幅 (5.117) である．素粒子の寿命 τ は粒子の数が $\frac{1}{e}N_0$ 個に減るまでの時間として次のように定義される：

$$\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}. \tag{5.120}$$

第 6 章
ゲージ対称性と素粒子標準模型

素粒子物理学は物質を構成する基本粒子が何かを突き止め，その基本粒子の運動を司る相互作用について調べることを目的とする．これまでのところ，自然界には 4 種類の基本相互作用（重力相互作用，電磁相互作用，弱い相互作用，強い相互作用）が存在することが知られており，このうち重力を除く 3 つの相互作用による素粒子の運動を明らかにしたのが「素粒子の標準模型」と呼ばれるものである．グラショウ，サラム，ワインバーグらは電磁気力と弱い力の統一模型（電弱統一模型）を 1960 年代後半に提唱し，数々の実験的検証を経て 1979 年にこの 3 名にノーベル物理学賞が授与された．現在では電弱統一模型と，強い相互作用を記述する量子色力学をあわせて素粒子の標準模型と呼んでいる．素粒子の標準模型は $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ ゲージ対称性に基づき，クォークやレプトンの振る舞いを説明するゲージ理論である．本章では素粒子の標準模型（単に「標準模型」と呼ぶことも多い）の全体像について紹介する．

なお，本書では基本的な「相互作用」と「力」は同義である．即ち電磁気力と電磁相互作用など，特に区別することなく用いる．

6.1 素粒子標準模型：概要

よく知られているように，原子はマイナス電荷を持つ電子とプラス電荷を持つ原子核から構成され，その構造は電磁気力によって保たれている．最も単純な原子は水素であり，電子 1 つと陽子 1 つの束縛状態である．電子も陽子もそれぞれ質量 m_e, m_p を持つため万有引力の法則にしたがうが，その影響は電磁気力に比べるとはるかに小さい．簡単な例として 2 つの電子に働く万有引力 F_G と電気力（クーロン力）F_C の大きさ

$$F_G = G_N \frac{m_e^2}{r^2}, \quad F_C = \frac{1}{4\pi}\frac{e^2}{r^2}, \tag{6.1}$$

を比較してみる．ここで $G_N = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2)$ は万有引力定数で

ある*1)．万有引力が常に互いに引き合う方向に働くのに対して電子 2 つの間に働くクーロン力は電荷が同符号であるため斥力である．自然単位系では万有引力定数 G_N はプランク質量 $m_{\rm pl}$ を用いて

$$G_N = \frac{1}{m_{\rm pl}^2} = \frac{1}{(1.2 \times 10^{19}\,{\rm GeV})^2} \tag{6.2}$$

と表され，また微細構造定数

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \simeq \frac{1}{137} \tag{6.3}$$

を用いると 2 つの力の大きさの比は

$$\frac{F_C}{F_g} = \alpha\frac{m_{\rm pl}^2}{m_e^2} \sim 10^{43} \tag{6.4}$$

となり，クーロン力が万有引力を圧倒する．従って重力の影響は無視して構わない．

原子核は複数の陽子と中性子の束縛状態として存在している．電磁気力は原子核内の陽子間には斥力として働き，また電荷を持たない中性子にはまったく力を及ぼさないため，原子核という陽子，中性子の束縛状態は電磁気力では説明することができない．原子核内部に陽子や中性子を閉じ込めておく力を核力もしくは強い力と呼ぶ．原子核は α 線（ヘリウム原子核），β 線（電子），γ 線（光子）などを放出しながら崩壊する．このうち β 線の放出を伴う β 崩壊を引き起こす力を弱い力と呼ぶ．原子の構造から天体の運動にいたる自然現象は電磁気力と重力によって支配されている．一方，核力，弱い力いずれもその有効な範囲は原子核のサイズより短い距離，およそ 10^{-15} m 以下に限定される．このように，自然界を支配する基本的な力は重力，電磁気力，強い力，弱い力の 4 種類が知られている．

強い力に反応する粒子をまとめてハドロンと呼ぶ．ハドロンはそのスピン量子数によって更に分類され，スピン整数のボース粒子を中間子（メソン），スピン半整数のフェルミオンをバリオンと呼ぶ．1950 年代にはサイクロトロンをはじめとする粒子加速器の開発・発展に伴い，π 中間子，K 中間子，ρ 中間子，Δ(デルタ)粒子，Λ(ラムダ)粒子など，たくさんのハドロンが存在することが確認された．

1960 年代には SLAC（スタンフォード線形加速器研究所，米国）で行われた電子と陽子の深非弾性散乱実験から，陽子内部にパートンと呼ばれる構成要素の存在が示され，一方ではゲルマン（M. Gell-Mann）とツヴァイク（G. Zweig）によってハドロンを u, d, s の 3 種類の基本粒子，クォークの束縛状態として説明するクォーク模型が作られた．ここで u（up）クォークは電荷 $\frac{2}{3}$ を

*1) 通常，クーロン力 F_C は真空の誘電率を ϵ_0 として $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$ と与えられることが多いが，ここでは $\epsilon_0 = 1$ としている．

持ち，d (down)，s (strange) クォークの電荷は $-\frac{1}{3}$ である．クォーク模型によるとバリオンは3つのクォークの束縛状態として，またメソンはクォークと反クォークの束縛状態として説明される．例えばバリオンである陽子や中性子はそれぞれ uud および udd の組合せとして，またメソンである π^- や K^- はそれぞれ $\overline{u}d$ や $\overline{u}s$ で理解される．

ハドロンを構成する，より基本的な粒子であるクォークに働く力をあらためて強い力と呼ぶ．後にそれぞれのクォークが3つのカラー量子数 (red, green, blue) を持つカラー三重項をなし，$\mathrm{SU}(3)_C$ (添字の C はカラーを表す) ゲージ理論によって記述される，ということが明らかになった．クォークの振る舞いを説明する $\mathrm{SU}(3)_C$ ゲージ理論を量子色力学 (Quantum Chromo Dynamics, QCD) と呼ぶ*2)．クォークは強い力，弱い力，電磁気力によってその振る舞いを支配される素粒子の総称であり，スピン 1/2 のフェルミオンである．一方，強い力の影響を受けない，電子やニュートリノなどのスピン 1/2 粒子の総称はレプトンである．

クォークやレプトンなどが従う，電磁相互作用と弱い相互作用を統一的に説明する模型 (電弱統一模型) は1960年代後半にグラショウ (S. Glashow)，サラム (A. Salam)，ワインバーグ (S. Weinberg) らによって提案された[29][30][31]．これに QCD を加えた模型はこれまで約半世紀に渡って行われてきたあらゆる類の素粒子実験の結果を矛盾なく説明するため，現在では「素粒子の標準模型」と呼ばれている．

標準模型は強い相互作用，電磁相互作用，弱い相互作用を $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ ゲージ対称性に基いて記述するゲージ理論である．ゲージ理論ではゲージ対称性の帰結として質量ゼロ，スピン1の素粒子であるゲージボソンが存在し，クォークやレプトンなどの物質粒子間に力を媒介する．$\mathrm{SU}(3)_C$ は強い相互作用の対称性を表し，ゲージボソンはグルーオンと呼ばれる．電磁相互作用の対称性は $\mathrm{U}(1)_{EM}$ で表され，ゲージボソンは光子である．このように強い相互作用や電磁相互作用はそれぞれ $\mathrm{SU}(3)_C$ および $\mathrm{U}(1)_{EM}$ ゲージ理論で記述されるが，弱い相互作用をゲージ理論として記述することはできなかった．弱い相互作用によって起きる典型的な現象である中性子の β 崩壊

$$n \to p + e^- + \overline{\nu}_e \tag{6.5}$$

を，力を担う粒子の媒介によるものとすると，その媒介粒子は有限の質量を持

*2) 実はカラー量子数を導入し，SU(3) ゲージ対称性に基づいてクォークの振る舞いを記述する最初の試みは南部陽一郎によってなされている[27]．そこではクォークの電荷の割り当て方などを除いて，現在我々が QCD と呼ぶ理論により記述される強い相互作用の性質が全て含まれている．QCD の重要な性質である，強い力の漸近的自由性の発見によって 2004 年度にノーベル物理学賞を授与されたグロス (D. Gross)，ポリツァー (H.D. Politzer)，ウィルチェク (F. Wilczek) の3名に対するノーベル賞公式サイトにおける受賞理由説明文のなかでも「南部の理論は QCD として全ての適切な内容を含んでいたが当時の人々に注目されるには発表されたのが早すぎたのだ」と述べられている[28]．

つ必要があり，一方でゲージ理論はゲージボソンの質量をゲージ対称性によって禁止するためである．

1964 年にはアングレール（F. Englert）-ブラウト（R. Brout），ヒッグス（P. Higgs），グラルニク（G.S. Guralnik）-ハーゲン（C.R. Hagen）-キッブル（T.W.B Kibble）らが自発的対称性の破れをゲージ理論に応用し，ゲージボソンがゲージ不変性と矛盾せずに質量を獲得する可能性を示した[32]．ゲージ対称性の自発的破れのきっかけとなるのは理論に導入されたスピン 0 のスカラー場（ヒッグス場）である．ヒッグス場が真空期待値を取ることでゲージ対称性を自発的に破り，ゲージボソンが有限の質量を獲得するプロセスをヒッグス機構という．1967 年にワインバーグとサラムは先んじてグラショウが提案していた $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ ゲージ対称性に基づく電弱統一模型*3)にこのヒッグス機構を取り入れ，今日の標準模型の基礎的な枠組みを与えた*4)．

標準模型はクォーク，レプトン，ヒッグス粒子を構成要素とし，電磁相互作用と弱い相互作用を $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ という対称性を持つゲージ理論として統一的に記述する．このゲージ対称性はスピン 0 のヒッグス場によって自発的に破れ，$\mathrm{U}(1)_{EM}$ のゲージ対称性だけが残る．$\mathrm{SU}(2)_L$ のゲージボソンは 3 つ，また $\mathrm{U}(1)_Y$ のゲージボソンは 1 つなので合計 4 つのうち 3 つが質量を獲得し，これが $W^{\pm}, Z$ ボソンとして β 崩壊を始めとする弱い相互作用の過程を媒介する．また自発的対称性の破れの後に残った $\mathrm{U}(1)_{EM}$ ゲージ対称性は電磁気力を記述し，ゲージボソンは質量 0 の光子に対応する．標準模型を構成する全ての粒子を表 6.1 にまとめる．クォーク，レプトンの上段と下段は電荷の違いを表す．水平方向は「世代」というラベルで区別され，左から第一，第二，第三世代と呼ばれる．クォークなら (u, d) が，レプトンなら (ν_e, e) が第一世代である．標準模型はクォークやレプトンの世代数が 3 であるという根拠を持たない．一方で第四世代以上のクォークやレプトンの存在を調べるための実験はこれまで数多く行われてきたが，その存在を示唆する兆候はまったく得られていない．

表 6.1　素粒子の標準模型に登場する粒子のまとめ．

クォーク				レプトン				ヒッグス粒子
(電荷 $\frac{2}{3}$)	u	c	t	(電荷 0)	ν_e	ν_μ	ν_τ	h
(電荷 $-\frac{1}{3}$)	d	s	b	(電荷 -1)	e	μ	τ	(電荷 0)

ゲージボソン		
(電磁気力)	(弱い力)	(強い力)
γ	$W^{\pm}$, Z	g

*3)　同じアイデアは独立にサラムとウォードによっても提案されていた[33]．

*4)　いずれも当初はレプトンについてのみ考察されていた．クォークを含む模型はグラショウ，イリオポウロス（Iliopoulos），マイアニ（Maiani）[34]によって，u, d, s に加えて c（チャーム・クォーク）を導入して構築された．

6.2 素粒子標準模型の構成

すでに紹介したように素粒子標準模型は $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ というゲージ対称性に基づき，クォークやレプトンの相互作用を記述する．強い力は $\mathrm{SU}(3)_C$ 対称性に基づきカラー量子数により特徴づけられ，クォークは $\mathrm{SU}(3)_C$ のカラー三重項として扱われる．弱い力と電磁気力はあわせて電弱相互作用と呼ばれ，$\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ 対称性によって記述される．$\mathrm{SU}(2)_L$，$\mathrm{U}(1)_Y$ それぞれを特徴付ける量子数を弱アイソスピンおよび弱ハイパーチャージという．先ずは $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ ゲージ対称性の下でのフェルミオン（クォーク，レプトン）の扱いについて述べよう．

スピン 1/2 のフェルミオン ψ は一般に 4 成分を持つ．しかし基底を適当に選ぶと ψ は γ_5 行列

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5 \tag{6.6}$$

に対する固有値が ∓ 1 となる 2 成分の左巻きフェルミオン ψ_L と右巻きフェルミオン ψ_R から構成される．次のように定義される演算子

$$P_L \equiv \frac{1-\gamma_5}{2}, \quad P_R \equiv \frac{1+\gamma_5}{2} \tag{6.7}$$

は射影演算子と呼ばれ，

$$P_L + P_R = 1, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = P_R P_L = 0 \tag{6.8}$$

を満たす．P_L, P_R を用いて ψ_L, ψ_R は

$$\psi_L \equiv P_L\psi, \quad \psi_R \equiv P_R\psi, \tag{6.9}$$

と与えられる．

ψ_L，ψ_R のディラック共役 $\overline{\psi}_L$，$\overline{\psi}_R$ は γ_5 のエルミート性 $(\gamma_5^\dagger = \gamma_5)$ と，γ^μ との反可換性

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0, \tag{6.10}$$

より

$$\overline{\psi}_L = \psi_L^\dagger\gamma^0 = (P_L\psi)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger P_L\gamma^0 = \overline{\psi}P_R, \tag{6.11}$$

$$\overline{\psi}_R = \overline{\psi}P_L, \tag{6.12}$$

となる．従ってフェルミオン ψ の自由ラグランジアン

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi \tag{6.13}$$

において運動項 $\mathcal{L}_{\mathrm{kin}}$ は

$$\mathcal{L}_{\rm kin} = i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi = i\overline{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + i\overline{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R \tag{6.14}$$

となり，ψ_L と ψ_R は独立に運動項を構成する．しかし質量項 $\mathcal{L}_{\rm m}$ は

$$-\mathcal{L}_m = m\overline{\psi}\psi = m\left(\overline{\psi}_L \psi_R + \overline{\psi}_R \psi_L\right) \tag{6.15}$$

となり，ψ_L と ψ_R はそれぞれ独立に質量項を持つことができない．従って左巻き，右巻きフェルミオンがそれぞれ独立に振る舞う理論（カイラルな理論という）では，フェルミオンの質量項は禁止される．別のいい方をするとフェルミオンの質量 $m=0$ の場合，自由ラグランジアン (6.13) は

$$\psi_L \to \psi'_L = e^{i\alpha_L}\psi_L, \quad \psi_R \to \psi'_R = e^{i\alpha_R}\psi_R, \tag{6.16}$$

（ただし α_L, α_R は定数）という変換に対して不変である．式 (6.16) の変換をカイラル変換といい，この変換の下で理論が不変な場合，理論はカイラル対称性を持つ（カイラルな理論）という．カイラルな理論ではフェルミオンの質量項はカイラル対称性によって禁止されている，という言い方もできる．

標準模型では左巻きフェルミオンを $\mathrm{SU}(2)_L$（弱アイソスピン）の二重項，右巻きフェルミオンは一重項として扱う．これは弱い相互作用におけるパリティ非保存の発見で分かった，ニュートリノには左巻きしか存在しない，という事実を反映させるためである．また $\mathrm{SU}(2)_L$ の添字 L は左巻きフェルミオンが SU(2) の変換を受けるという意味である*5)．一方，全てのフェルミオンは $\mathrm{U}(1)_Y$ ゲージ変換の影響を受ける，つまり弱ハイパーチャージ Y を持つ．$\mathrm{U}(1)_Y$ の添字 Y は他の U(1) 変換，例えば電磁気力 $\mathrm{U}(1)_{EM}$ などと区別するために付けられている．

標準模型に含まれる唯一のスカラー場であるヒッグス場は $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項として導入される．ヒッグス場が一重項，即ち $\mathrm{SU}(2)_L$ の下で変換しなければ，電弱対称性 $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ の自発的破れに関与できないためである．

標準模型は $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ ゲージ対称性のもとで右巻き，左巻きフェルミオンに異なる量子数を割りあてる．これは例えば右巻き電子と左巻き電子を異なる粒子として扱う，ということである．QED 即ち $\mathrm{U}(1)_{EM}$ ゲージ対称性のもとでは右巻き電子 e_R の電荷 Q_R と左巻き電子 e_L の電荷 Q_L は等しい ($Q_L = Q_R = -1$) ということを思い出そう．つまり $\mathrm{U}(1)_{EM}$ 変換は

$$e'_R = e^{iQ_R\theta}e_R, \qquad e'_L = e^{iQ_L\theta}e_L \tag{6.17}$$

であり，ラグランジアンの質量項は

$$\mathcal{L}_{\rm m} = m\overline{e}'_R e'_L = m e^{-i(Q_R - Q_L)\theta}\overline{e}_R e_L = m\overline{e}_R e_L, \tag{6.18}$$

となり，ゲージ不変である*6)．しかし e_R と e_L の弱ハイパーチャージ Y_R, Y_L

*5) 右巻きは一重項なので変換しない．

*6) エルミート共役な部分は省略した．

表 6.2 標準模型を構成するクォーク，レプトン，ヒッグス場の量子数の一覧．「カラー」「弱アイソスピン」の各欄にある数字は $\mathrm{SU}(3)_C, \mathrm{SU}(2)_L$ の 3 表現，2 表現などを表す．クォーク，レプトンの各世代でこれらの量子数は共通であるため，第一世代のみ載せている．$\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項のクォーク，レプトン，ヒッグスはそれぞれ Q, L, φ と表す．添字の L, R は左巻き，右巻きフェルミオンであることを示す．電荷 Q はゲルマン–西島の公式 (6.20) を満たす．電荷と $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項クォークが同じ記号 Q で表されていることに注意せよ．

場	カラー	弱アイソスピン I	I_3	Y	電荷 Q
$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	**3**	**2**	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
u_R	**3**	**1**	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
d_R	**3**	**1**	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}$	**1**	**2**	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
e_R	**1**	**1**	0	-1	-1
$\varphi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	**1**	**2**	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}$

が異なると $\mathrm{U}(1)_Y$ ゲージ変換のもとで質量項は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{m}} = m\overline{e}'_R e'_L = m e^{-i(Y_R - Y_L)\theta} \overline{e}_R e_L \neq m\overline{e}_R e_L \tag{6.19}$$

となり，$\mathrm{U}(1)_Y$ ゲージ不変性を破る．カイラルな理論ではフェルミオンの質量項はカイラル対称性によって禁止されるが，素粒子標準模型ではゲージ対称性によってフェルミオンの質量項は禁止されている．次章で説明するように，フェルミオンの質量項は $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ ゲージ対称性が $\mathrm{U}(1)_{EM}$ 対称性へと自発的に破れることによって与えられる．また，その結果としてフェルミオンの電荷 Q が与えられる．電荷 Q は $\mathrm{U}(1)_{EM}$ の生成子であり，$\mathrm{U}(1)_{EM}$ は $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ の破れの結果生き残った対称性であるため，$\mathrm{SU}(2)_L$ の生成子である弱アイソスピンの第 3 成分 I_3 および $\mathrm{U}(1)_Y$ の生成子である弱ハイパーチャージ Y と

$$Q = I_3 + Y \tag{6.20}$$

で関係づいている．式 (6.20) はゲルマン–西島（Gell-Mann-Nishijima）の公式と呼ばれる．表 6.1 にあげたクォーク，レプトンおよびヒッグス場の電荷が (6.20) を通して再現されるよう，I_3 と Y を決めておかなくてはならない．クォーク，レプトンおよびヒッグス場に対する $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ 量子数の割り当てを表 6.2 にまとめる．

6.3 アノマリー相殺条件

場の理論において古典的レベルで成り立っていた対称性が量子効果によって破られる現象をアノマリーという．ゲージ理論もアノマリーを持ち，量子論レベルでのゲージ対称性が保証されない場合がある．

QED ではフェルミオン ψ とゲージ場 V_μ の相互作用はベクトル型 $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi V_\mu$ で与えられる．このとき $J^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ をベクトルカレントというが，運動方程式（ディラック方程式）

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi = 0, \quad \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right) = 0, \tag{6.21}$$

から

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{6.22}$$

となる．式 (6.22) はカレント保存則と呼ばれており，QED のゲージ不変性によって摂動の任意の次数で成り立つことが知られている．フェルミオンが左巻き成分，右巻き成分を持つことから軸性カレントを

$$j_5^\mu \equiv \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{6.23}$$

で定義すると運動方程式 (6.21) から

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im\overline{\psi}\gamma_5\psi \to \partial_\mu j_5^\mu = 0 \;\; (m \to 0) \tag{6.24}$$

となる．カイラルな理論ではフェルミオンの質量はゼロ（$m = 0$）なのでベクトルカレント同様，軸性カレントも保存される．しかし図 6.1 のようなゲージ場 3 点相互作用に対する 1 ループ補正のファインマン・ダイアグラム（3 つのゲージ場のうち 1 つがフェルミオンと軸性ベクトル型の相互作用をする）は軸性カレントの微分

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{g^2}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \tag{6.25}$$

を与え，軸性カレントの保存則を破る．(6.25) の右辺はフェルミオン質量によ

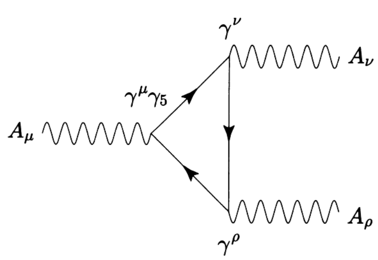


図 6.1 カイラル・フェルミオンの交換によるゲージ場 3 点バーテックスへの 1 ループ補正を表すファインマン・ダイアグラム．

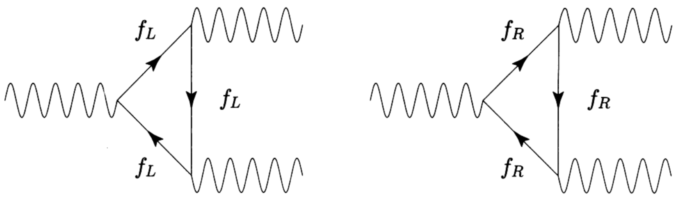


図 6.2 カイラルフェルミオン f_L（左巻き）および f_R（右巻き）によるゲージ場 3 点バーテックスへの寄与を表す 1 ループのファインマン図.

らないので，これは古典的に成り立っていたカイラル対称性が 1 ループレベルで破れたことを意味する．これをカイラルアノマリーという．

カイラルな理論では左巻きおよび右巻きフェルミオン ψ_L, ψ_R はゲージ場と

$$\overline{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L V_\mu = \overline{\psi} \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \psi V_\mu, \tag{6.26}$$

$$\overline{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R V_\mu = \overline{\psi} \gamma^\mu \frac{1+\gamma_5}{2} \psi V_\mu, \tag{6.27}$$

のようにベクトル型 (γ^μ)，軸性ベクトル型 ($\gamma^\mu \gamma_5$) の両方で相互作用するのでベクトルカレント同様，軸性カレントの保存則 $\partial_\mu j_5^\mu = 0$ が成り立つこともゲージ不変性から要請される．しかしカイラルアノマリー (6.25) はゲージ対称性が摂動の高次では成り立たないことを示唆しており，カイラルなゲージ理論である素粒子標準模型にとっては深刻な問題である（ゲージ・アノマリーとも呼ばれる).

ゲージ場の 3 点相互作用に対するカイラル・フェルミオンの 1 ループ補正は，図 6.2 のように左巻きフェルミオンと右巻きフェルミオンがそれぞれ独立に寄与する．両者の寄与は共通の因子を省略して

$$\partial_\mu j_5^\mu \propto \mathrm{Tr}\left(\left\{T_L^i, T_L^j\right\} T_L^k\right) - \mathrm{Tr}\left(\left\{T_R^i, T_R^j\right\} T_R^k\right) \tag{6.28}$$

の形でまとめられる．ここで T_L, T_R はそれぞれ左巻き，右巻きフェルミオンの属する群の生成子である．

QED や QCD のようなゲージ相互作用がベクトル型の理論の場合，$T_L = T_R$ のため (6.28) からアノマリーは存在しないことが分かる．他にアノマリーを避けるにはフェルミオンを群の実表現に取るとか，そもそもアノマリーを持たない群を用いて理論を作る*7) などがあるが，標準模型のフェルミオンは SU(N) の基本表現に属するカイラルフェルミオンであるため，アノマリーは不可避である．標準模型のゲージ不変性を保証するには，(6.28) で与えられる個々のフェルミオンによる非自明な寄与が打ち消し合う必要がある．これをアノマリー相殺条件という．

*7) 大統一理論では SO(10) や E_6 など，アノマリーを持たない群を用いた模型が提案されている.

標準模型における 1 ループのゲージ場 3 点ダイアグラムを個別に見てみよう．ゲージ対称性は $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ であるため，3 つの外線を 3 種類のゲージボソンが占めることになる．$\mathrm{SU}(N)$ の生成子 T^a は $\mathrm{Tr}\ T^a = 0$ を満たすので，SU(3) もしくは SU(2) のゲージボソンを 1 つだけ含むダイアグラムによるアノマリーへの寄与は消えてしまう．3 つの外線を SU(3) ゲージボソンが占める場合はクォークのみが寄与する．クォークとグルーオンとの相互作用の大きさは左巻き・右巻きの間で全く同じなので，(6.28) によって互いに相殺し，やはりアノマリーへの寄与はない．

SU(2) ゲージボソン 3 つからなるダイアグラムはどうだろうか．ここでは左巻きフェルミオンのみが寄与するので，(6.28) はパウリ行列 σ^a を用いて $\mathrm{Tr}\left(\left\{\frac{\sigma^a}{2}, \frac{\sigma^b}{2}\right\}\frac{\sigma^c}{2}\right)$ となる．しかしパウリ行列の性質 $\left\{\sigma^a, \sigma^b\right\} = 2\delta^{ab}$ より (6.28) は $\mathrm{Tr}\left(\frac{\sigma^a}{2}\right) = 0$ となり，アノマリーは現れない．

結局，考慮すべきものは $[\mathrm{SU}(3)]^2\,\mathrm{U}(1)$, $[\mathrm{SU}(2)]^2\,\mathrm{U}(1)$, $[\mathrm{U}(1)]^3$ の 3 つである．1 つずつ確認していこう．

$\mathbf{SU(3)^2\ U(1)}$

(6.28) の右辺は各項 $\mathrm{Tr}\left(\left\{T^a, T^b\right\} Y\right) = \frac{1}{2}\delta^{ab} Y$ となり，クォークのハイパーチャージの和に比例する．表 6.2 を見ながらハイパーチャージの和を求めると：

$$\sum Y = Y_Q \times 2 - (Y_{u_R} + Y_{d_R}) = 0 \tag{6.29}$$

となり，このダイアグラムへの寄与は打ち消し合っていることが確認できる．ここで Y_Q の値を 2 倍しているのは SU(2) 二重項を構成する u_L, d_L が同じハイパーチャージを持つからである．

$\mathbf{SU(2)^2\ U(1)}$

SU(2) の生成子の扱いについては SU(3) の場合と同様だが，今回は左巻きフェルミオンだけが寄与するのでそれを求めると

$$\sum Y = Y_Q \times 3 + Y_L = 0 \tag{6.30}$$

であり，それぞれの寄与が打ち消し合っている．

$\mathbf{U(1)^3}$

全てのクォーク，レプトンが寄与する．ハイパーチャージの三乗和 $\sum Y^3$ を求めると以下のように 0 であることが分かる：

$$\begin{aligned}\sum Y^3 = &\left(Y_Q^3 \times 3 + Y_L^3\right) \times 2 \\ &- \left\{\left(Y_{u_R}^3 + Y_{d_R}^3\right) \times 3 + Y_{e_R}^3\right\} = 0.\end{aligned} \tag{6.31}$$

以上のように素粒子標準模型では一般にカイラルなゲージ理論で生じるゲージ・アノマリーが各フェルミオンの寄与によって相殺していることが確認できた．

6.4 標準模型のラグランジアン

標準模型のラグランジアンはゲージ場，フェルミオン，ヒッグス場の運動項 ($\mathcal{L}_{\text{kin}}$)，湯川相互作用 ($\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$)，ヒッグス場の自己相互作用によるスカラーポテンシャル (V_{Higgs}) から構成される：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} - V_{\text{Higgs}}. \tag{6.32}$$

運動項 $\mathcal{L}_{\text{kin}}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{kin}} &= -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu}G^{a\,\mu\nu} - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3} W^a_{\mu\nu}W^{a\,\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\ &\quad + i\overline{\psi}_L\gamma^\mu D_\mu\psi_L + i\overline{\psi}_R\gamma^\mu D_\mu\psi_R + |D_\mu\phi|^2\end{aligned} \tag{6.33}$$

で与えられる．ここで右辺の最初の 3 項はそれぞれグルーオン，$\mathrm{SU}(2)_L$ ゲージ場，$\mathrm{U}(1)_Y$ ゲージ場の運動項を表す．また各ゲージ場の強さテンソルは

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - g_s f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu, \tag{6.34}$$

$$W^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu - g\epsilon^{abc} W^b_\mu W^c_\nu, \tag{6.35}$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{6.36}$$

となる．ここで g_s および g はそれぞれ $\mathrm{SU}(3)_C$, $\mathrm{SU}(2)_L$ のゲージ結合定数を表す．また f^{abc}, ϵ^{abc} は $\mathrm{SU}(3)_C$，$\mathrm{SU}(2)_L$ 群の構造定数である．

式 (6.33) の右辺 2 行目の第 1, 2 項はそれぞれ左巻きフェルミオン ψ_L と右巻きフェルミオン ψ_R の運動項である．ψ_L は $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項に属するクォークとレプトン ($Q = (u_L, d_L)^T$, $L = (\nu_e, e_L)^T$) を表し，ψ_R は $\mathrm{SU}(2)_L$ 一重項のクォークとレプトン (u_R, d_R, e_R) を表す．共変微分 D_μ は

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s\frac{\lambda^a}{2}G^a_\mu + ig\frac{\sigma^a}{2}W^a_\mu + ig_Y Y B_\mu \tag{6.37}$$

である．λ^a, σ^a はそれぞれゲルマン行列，パウリ行列であり，Y はハイパーチャージ，g_Y は $\mathrm{U}(1)_Y$ ゲージ結合定数である．もちろん共変微分の中身は結合する粒子が各ゲージ群のどの表現に属するかによって変わってくる．具体的には

$$D_\mu Q = \left(\partial_\mu + ig_s\frac{\lambda^a}{2}G^a_\mu + ig\frac{\sigma^a}{2}W^a_\mu + ig_Y Y_Q B_\mu\right)Q, \tag{6.38}$$

$$D_\mu u_R = \left(\partial_\mu + ig_s\frac{\lambda^a}{2}G^a_\mu \qquad\qquad + ig_Y Y_{u_R} B_\mu\right)u_R, \tag{6.39}$$

$$D_\mu d_R = \left(\partial_\mu + ig_s\frac{\lambda^a}{2}G^a_\mu \qquad\qquad + ig_Y Y_{d_R} B_\mu\right)d_R, \tag{6.40}$$

$$D_\mu L = \left(\partial_\mu \qquad\qquad + ig\frac{\sigma^a}{2}W^a_\mu + ig_Y Y_L B_\mu\right)L, \tag{6.41}$$

$$D_\mu e_R = \left(\partial_\mu \qquad\qquad\qquad\qquad + ig_Y Y_{e_R} B_\mu\right) e_R, \tag{6.42}$$

$$D_\mu \varphi = \left(\partial_\mu \qquad\qquad + ig\frac{\sigma^a}{2}W_\mu^a + ig_Y Y_\varphi B_\mu\right)\varphi, \tag{6.43}$$

となる．

6.4.1 ゲージボソンの質量固有状態と共変微分

標準模型では電弱ゲージ対称性 $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ は自発的に破れ，$\mathrm{U}(1)_{EM}$ ゲージ対称性が残る．ゲージ対称性が破られる前は W^a $(a = 1, 2, 3)$ と B の 4 つのゲージボソンが存在したが，自発的対称性の破れが起きた後は，$W^\pm$ と Z の 3 つが質量を獲得し，光子 A が質量ゼロのゲージボソンとして残る．以下では W^a と B で表された (6.37) を質量固有状態 $W^\pm, Z, A$ を用いて表す．

先ずパウリ行列 $\sigma^{1,2}$ の線形結合で $T^\pm$ を次のように定義する：

$$T^\pm \equiv \frac{\sigma^1 \pm i\sigma^2}{2}, \quad T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.44}$$

次に荷電ゲージボソン $W^\mp$ を次式で定義する：

$$W^\mp \equiv \frac{W^1 \pm iW^2}{\sqrt{2}}. \tag{6.45}$$

(6.44) と (6.45) から，共変微分に現れる $\frac{\sigma^a}{2}W_\mu^a$ は 次のように $W^\pm, W^3$ で表される：

$$\frac{\sigma^a}{2}W_\mu^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-) + \frac{\sigma^3}{2}W_\mu^3. \tag{6.46}$$

ここで (6.46) の書き換えの意味を理解するためにクォークの $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項 $Q = (u_L, d_L)$ と $\mathrm{SU}(2)_L$ ゲージボソンの相互作用を考えてみよう．運動項のラグランジアン (6.33) よりクォーク二重項 Q のゲージ場との相互作用部分を抜き出してみると

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\overline{Q}\gamma^\mu D_\mu Q \\ &\sim \overline{Q}\gamma^\mu ig\frac{\sigma^a}{2}W_\mu^a Q\end{aligned} \tag{6.47}$$

となる．ここで (6.46) を用いると

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\sim \overline{Q}\gamma^\mu ig\frac{\sigma^a}{2}W_\mu^a Q \\ &= \frac{ig}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \overline{u}_L & \overline{d}_L \end{pmatrix}\gamma^\mu(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-)\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\ &\quad +\frac{ig}{2}\begin{pmatrix} \overline{u}_L & \overline{d}_L \end{pmatrix}\gamma^\mu\sigma^3 W_\mu^3\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \frac{ig}{\sqrt{2}} \left(\overline{u}_L \gamma^\mu d_L W_\mu^+ + \overline{d}_L \gamma^\mu u_L W_\mu^- \right) + \frac{ig}{2} \left(\overline{u}_L \gamma^\mu u_L + \overline{d}_L \gamma^\mu d_L \right) W_\mu^3 \tag{6.48}$$

となる．つまり T^+ がかかる項は d_L が W^+ との相互作用を通して u_L へと変化し，T^- がかかる項は反対に u_L が W^- との相互作用によって d_L へと変化する．このように W^+, W^- はそれぞれクォークの電荷を ±1 だけ変えるため荷電 W ボソンと見なせるのである．一方で W^3 はパウリ行列 σ^3 が対角行列であるため，u_L と d_L の間の遷移が起きず，電荷を変えない相互作用を媒介する中性ゲージボソンと見なせる．以上の議論は他の $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項である左巻きレプトン $L = (\nu_e, e_L)$ やヒッグス場 $\varphi = (\phi^+, \phi^0)$ に対しても同様である．

$\mathrm{U}(1)_Y$ ゲージボソン B_μ と $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項との相互作用はハイパーチャージ Y が単位行列に比例するため W^3 ボソンの場合と同様，相互作用の過程で電荷を変えない．よって電気的に中性な 2 つのゲージボソン W^3, B から光子 A と質量を持つ中性ベクトルボソン Z を次のように定義する：

$$\begin{pmatrix} B \\ W^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix}. \tag{6.49}$$

ここで θ_W は混合角であるが，現在ではこれをワインバーグ角と呼んでいる．$\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項 $\psi = (\psi_\uparrow, \psi_\downarrow)$ と中性ゲージボソン B_μ, W_μ^3 との相互作用を共変微分から抜き出してみると

$$D_\mu \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \sim \left(g_Y Y \cdot \mathbf{1} B_\mu + g \frac{\sigma^3}{2} W_\mu^3 \right) \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}$$
$$= g_Y Y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (A_\mu \cos\theta_W - Z_\mu \sin\theta_W) \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} (A_\mu \sin\theta_W + Z_\mu \cos\theta_W) \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \tag{6.50}$$

となる．光子は QED のゲージボソンなので (6.50) での光子の結合定数を QED の結合定数 e と次式で関係づける：

$$e = g \sin\theta_W = g_Y \cos\theta_W. \tag{6.51}$$

式 (6.50) での光子 A_μ の結合定数を e で，また Z_μ の結合定数は $\frac{g}{\cos\theta_W}$ で表すと

$$\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} (eA_\mu - \frac{g\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W} Z_\mu) \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} (eA_\mu + \frac{g(1-\sin^2\theta_W)}{\cos\theta_W} Z_\mu) \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= e\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+Y & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}+Y \end{pmatrix} A_\mu \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{g}{\cos\theta_W}\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+Y & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}+Y \end{pmatrix}\sin^2\theta_W\right\} Z_\mu \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \\
&= e\begin{pmatrix} Q_\uparrow & 0 \\ 0 & Q_\downarrow \end{pmatrix} A_\mu \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{g}{\cos\theta_W}\left\{\begin{pmatrix} I_{3\uparrow} & 0 \\ 0 & I_{3\downarrow} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_\uparrow & 0 \\ 0 & Q_\downarrow \end{pmatrix}\sin^2\theta_W\right\} Z_\mu \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.52}
$$

となる．各行列要素に現れる $\pm\frac{1}{2}$ は $\psi_\uparrow, \psi_\downarrow$ の弱アイソスピンの第 3 成分 $I_{3\uparrow}, I_{3\downarrow}$ なのでゲルマン–西島の公式 (6.20) を用いて $\psi_\uparrow$ $(\psi_\downarrow)$ の電荷 $Q_\uparrow$ $(Q_\downarrow)$ で表した．これにより共変微分 (6.37) をゲージボソンの質量固有状態で表すと次式のようになる（グルーオンの部分は省略）：

$$
\begin{aligned}
D_\mu &= \partial_\mu + ig\frac{\sigma^a}{2}W_\mu^a + ig_Y Y B_\mu \\
&= \partial_\mu + ig\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right)\right\} \\
&\qquad + ieQA_\mu + ig_Z(I_3 - Q\sin^2\theta_W)Z_\mu.
\end{aligned} \tag{6.53}
$$

ここで $g_Z \equiv \frac{g}{\cos\theta_W}$ を用いた．

6.4.2 湯川相互作用

前節では標準模型におけるクォーク，レプトン，ヒッグス場のゲージ相互作用について紹介した．標準模型ではゲージ相互作用以外にゲージ場を介さない相互作用，即ちクォークやレプトンとヒッグス場の相互作用がある．そのような相互作用はローレンツ不変性よりフェルミオン (F) 2 つとスカラー場 (S) 1 つ，というものに限定される．FFS 型の相互作用を湯川相互作用と呼ぶ．標準模型の湯川相互作用はバリオン数，レプトン数の保存則より，クォーク 2 つとヒッグス場 $(\overline{q}_1 q_2 \phi)$，およびレプトン 2 つとヒッグス場 $(\bar{l}_1 l_2 \phi)$，という 2 種類になる．いずれも $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ ゲージ不変性を持たなくてはならない．$\mathrm{SU}(3)_C$ 対称性に関係するのはクォークの湯川相互作用 $\overline{q}_1 q_2 \phi$ である．ヒッグス場はカラー量子数を持たず，2 つのクォーク q_1, q_2 がいずれも $\mathrm{SU}(3)_C$ の三重項（これを 3 次元表現 **3** と表す）なので湯川相互作用の $\mathrm{SU}(3)_C$ 対称性は

$$
\mathbf{3} \times \mathbf{3}^* = \mathbf{8} + \mathbf{1} \tag{6.54}
$$

と分解され，一重項部分が $\mathrm{SU}(3)_C$ 不変な相互作用に対応している．一方，湯川相互作用の $\mathrm{SU}(2)_L$ 不変性はどうだろうか．ヒッグス場は $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項な

ので相互作用する 2 つのフェルミオンのうち，どちらかが二重項ならば

$$\mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{3} + \mathbf{1} \tag{6.55}$$

となり，$\mathrm{SU}(2)_L$ 不変性を満たす．従って標準模型の湯川相互作用は $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項のフェルミオン，$\mathrm{SU}(2)_L$ 一重項のフェルミオン，ヒッグス場の相互作用となる．

$\mathrm{U}(1)_Y$ ゲージ不変性を見よう．2 つのフェルミオン ψ_1, ψ_2 とスカラー ϕ が $\overline{\psi}_1\psi_2\phi$ という湯川相互作用をする．これらのハイパーチャージがそれぞれ Y_1, Y_2, Y_ϕ であるとき，$\mathrm{U}(1)_Y$ ゲージ変換は

$$\psi_1' = e^{iY_1\theta}\psi_1, \quad \psi_2' = e^{iY_2\theta}\psi_2, \quad \phi' = e^{iY_\phi\theta}\phi, \tag{6.56}$$

となるので，湯川相互作用のゲージ変換は

$$\left(\overline{\psi}_1\psi_2\phi\right)' = e^{i(-Y_1+Y_2+Y_\phi)}\overline{\psi}_1\psi_2\phi \tag{6.57}$$

となり，ゲージ不変になるためには

$$-Y_1 + Y_2 + Y_\phi = 0 \tag{6.58}$$

を満たさなくてはならない．次の 2 つの相互作用項

$$\overline{Q}d_R\phi, \quad \overline{L}e_R\phi, \tag{6.59}$$

はそれぞれ表 6.2 に与えたハイパーチャージを代入してみると (6.58) の条件を満たしていることが分かる．しかし右巻き u クォーク (u_R) を含む項

$$\overline{Q}u_R\phi \tag{6.60}$$

は (6.58) を満たさない．ヒッグス場 ϕ の複素共役 ϕ^* を取れば (6.58) は満たされるが，SU(2) 二重項の Q が $Q' = UQ$ と変換するのに対し，複素表現である ϕ^* は $\phi'^* = U^*\phi^*$ と変換するので，

$$\overline{Q}'u_R\phi'^* = \overline{Q}U^\dagger u_R U^*\phi^* = \overline{Q}U^\dagger U^* u_R\phi^* \tag{6.61}$$

となり，一般に $U^\dagger U^* \neq 1$ であることから SU(2) 不変性を破っている．しかし，ϕ^* の代わりに

$$\phi^c \equiv i\sigma_2\phi^* \tag{6.62}$$

で定義される ϕ^c は $\phi'^c = U\phi^c$ と変換することが次のように分かる．先ず

$$C \equiv i\sigma_2 \tag{6.63}$$

とする．これがパウリ行列 σ^a に対して

$$C\sigma^a C^{-1} = -\sigma^{a*} \tag{6.64}$$

を満たすことは直接確かめられる．パウリ行列は SU(2) の生成子なので (6.64) の関係式は SU(2) の変換行列 U に対する次の関係式

$$CUC^{-1} = U^* \tag{6.65}$$

を与えることが分かる．また式 (6.63) より $C^* = C$ である．これより SU(2) の **2** 表現 ϕ の変換

$$\phi' = U\phi \tag{6.66}$$

の両辺に C を掛け，

$$\begin{aligned} C\phi' &= CU(C^{-1}C)\phi \\ &= U^*(C\phi) \end{aligned} \tag{6.67}$$

を得る．両辺の複素共役を取ると

$$(C\phi^*)' = U(C\phi^*) \tag{6.68}$$

となる．従って右巻き u クォークを含む湯川相互作用は (6.60) ではなく，

$$\overline{Q}u_R\phi^c \tag{6.69}$$

という形でなくてはならない．結局，湯川相互作用のラグランジアンは

$$-\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = f_u\overline{Q}u_R\phi^c + f_d\overline{Q}d_R\phi + f_e\overline{L}e_R\phi + \text{h.c.} \tag{6.70}$$

となる．ここで f_u, f_d, f_e は u クォーク，d クォーク，電子の湯川結合定数と呼ばれる．またラグランジアンのエルミート性を保証するため，エルミート共役の項 (h.c.) を加えておく必要がある．また右辺のマイナス符号は運動項に対する相互作用項の相対符号を表す ($\mathcal{L} = T - V$).

6.4.3 ヒッグスポテンシャル

最後にヒッグスポテンシャルについて述べておく．これまで紹介したゲージ相互作用，湯川相互作用以外にゲージ不変性を満たす相互作用としてヒッグス場の自己相互作用がある．ヒッグス場 ϕ は $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項なので，$\phi^\dagger\phi$ という項はつねにゲージ対称性を満たす．ヒッグス場の自己相互作用のみで構成されるポテンシャルをヒッグスポテンシャルといい，次式で与えられる：

$$V = \mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \quad (\mu^2 < 0,\ \lambda > 0), \tag{6.71}$$

ここで $\lambda > 0$ はポテンシャル V が有限な最小値 ($V_{\min}$) を持つために必要な条件である．ポテンシャル V の最小値は系の最も安定な状態（基底状態もしくは真空という）に対応する．ヒッグスポテンシャルは $\phi^\dagger\phi = |\phi|^2$ と $|\phi|^4$ の項からなるため，ϕ の増大に伴って $|\phi|^2 \ll |\phi|^4$ となり，第 2 項が支配的になる．

もし $\lambda < 0$ ならば ϕ の値が大きな極限で $V \to -\infty$ となり，$V_{\rm min}$ が定まらず，系が不安定になる．

$\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項のスカラー場は次のように実数部分と虚数部分に分けられる：

$$\phi = \mathrm{Re}\ \phi + i\mathrm{Im}\ \phi. \tag{6.72}$$

するとヒッグスポテンシャルの $\mathrm{SU}(2)_L$ 不変性は

$$\phi^\dagger\phi = (\mathrm{Re}\ \phi)^2 + (\mathrm{Im}\ \phi)^2 \tag{6.73}$$

で表される．$\lambda > 0$ の下で $\mu^2 > 0$ であれば $\mathrm{Re}\ \phi = \mathrm{Im}\ \phi = 0$ で $V_{\rm min} = 0$ となる．しかし $\mu^2 < 0$ の場合，極値を持つ条件 $\frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0$ からポテンシャルは $V = 0$ 以外にも極値を持ち，最小値 $V_{\rm min}$ は $\phi^\dagger\phi$ が

$$\phi^\dagger\phi = (\mathrm{Re}\ \phi)^2 + (\mathrm{Im}\ \phi)^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \tag{6.74}$$

を満たすときに与えられる．つまり (6.74) が定める真空は $\mathrm{SU}(2)_L$ 不変であるがそのような真空は無数に存在し，(6.74) を満たすどれか一点，例えば

$$(\mathrm{Re}\ \phi)^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda},\quad (\mathrm{Im}\ \phi)^2 = 0, \tag{6.75}$$

を選ぶとポテンシャル V が持っていた $\mathrm{SU}(2)_L$ 対称性は破れてしまう．このようにスカラー場 ϕ が「真空期待値」

$$\langle\phi\rangle \equiv \frac{v}{\sqrt{2}},\quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}, \tag{6.76}$$

を取ることで真空の対称性が破れてしまうことを自発的対称性の破れという．ヒッグス場は $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項であり，表 6.2 ではその成分を

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} \tag{6.77}$$

と割り当てている．標準模型ではヒッグス場の真空期待値 (6.76) によって $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ ゲージ対称性を自発的に破り，QED のゲージ対称性 $\mathrm{U}(1)_{EM}$ が残る（$\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y \to \mathrm{U}(1)_{EM}$）．そのためには (6.77) の中性成分 ϕ^0 が真空期待値を取るように選ぶ必要がある．

第 7 章
電弱対称性の自発的破れとその帰結

本章では自発的対称性の破れのアイデアをゲージ理論に適用したヒッグス機構について解説する．素粒子標準模型では，弱い相互作用と電磁相互作用を統一的に記述する $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ 対称性（電弱対称性）が自発的に破れ，量子電気力学のゲージ対称性 $\mathrm{U}(1)_{EM}$ が残る．この対称性の破れがどのように実現され，クォークやレプトン，ゲージ粒子等が質量を獲得するに至るのか，具体的に追っていく．また電弱対称性の自発的破れを通して，素粒子標準模型の検証および標準模型を越える素粒子模型の可能性をテストする方法についても紹介する．

7.1　ゲージ対称性とゲージ場の質量

おさらいを兼ねて電磁相互作用するスカラー場の模型を考えよう．そのような模型はスカラー QED と呼ばれ，$\mathrm{U}(1)_{EM}$ 不変なラグランジアン

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi) \tag{7.1}$$

で記述される．スカラー場 ϕ，電磁場 A_μ のゲージ変換は

$$\phi \to e^{i\alpha}\phi, \quad A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \tag{7.2}$$

で与えられ，共変微分は $D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$ である．ポテンシャル V は理論のくりこみ可能性を考慮し*1)

$$V = \mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2 \tag{7.3}$$

で与えられる．μ^2 が負のとき，このポテンシャルは ϕ が $\langle\phi\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}$，$v^2 = -\mu^2/\lambda$ で最小となり，自発的にゲージ対称性を破る．スカラー場 ϕ を真空期

*1)　ラグランジアンを構成する項が，結合定数を除いて質量次元で 4 を超えないことを要請する．

待値 v とその周りのゆらぎ（実スカラー場）ϕ_1, ϕ_2 で

$$\phi = \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \tag{7.4}$$

と表し，元のポテンシャルに代入する．ϕ_1^2 および ϕ_2^2 の項（質量項）に注目すると

$$V = -\mu^2\phi_1^2 + 0 \cdot \phi_2^2 + \cdots \tag{7.5}$$

となり，ϕ_2 は質量を持たないことが分かる．これが自発的対称性の破れに伴う南部–ゴールドストーン粒子である．

共変微分の項を (7.4) で書き直すと

$$\begin{aligned}|D_\mu\phi|^2 \;=\; &\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + \frac{(ev)^2}{2}A_\mu A^\mu \\ &+ evA_\mu\partial^\mu\phi_2 + \cdots\end{aligned} \tag{7.6}$$

となる．従って最初のラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + \frac{(ev)^2}{2}A_\mu A^\mu \\ &+evA_\mu\partial^\mu\phi_2 + \mu^2\phi_1^2 + \cdots\end{aligned} \tag{7.7}$$

となる．右辺第 4 項から光子は質量 $m_A = ev$ を獲得し，ゲージ対称性が破れたことが分かる．第 5 項は光子と南部–ゴールドストーン粒子の混合項であるがその物理的意味を考察しよう．ラグランジアンの中で光子の 2 次の項（ただし微分を含まない）を運動量空間へフーリエ変換したものを「真空偏極」項といい，その係数を $\Pi^{\mu\nu}$ で表す．もし真空偏極項が QED のラグランジアンにあった場合，それは

$$\mathcal{L} \sim A_\mu \Pi^{\mu\nu} A_\nu \tag{7.8}$$

という形で現れる．これがゲージ不変であるための条件を考えよう．光子 A_μ は運動量空間では偏極ベクトル ϵ_μ に比例するので運動量 k を持つ A_μ のゲージ変換は ϵ_μ に対する変換

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\chi, \quad \epsilon_\mu \to \epsilon_\mu + \frac{1}{e}ik_\mu \tag{7.9}$$

となる*2)．すると真空偏極項 $\Pi^{\mu\nu}$ の運動量依存性を k^2 とすると，$\Pi^{\mu\nu}$ にくっつく光子の偏極ベクトルを 4 元運動量 k_μ に置き換えてもラグランジアンが不変ということから

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0 \tag{7.10}$$

となる．この「カレント保存則」は QED のゲージ不変性の直接的帰結である．

---

*2) スカラー場 χ の座標依存性を $\chi \sim e^{-ikx}$ とした．

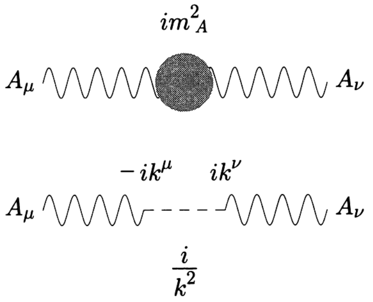


図 7.1　真空偏極 $i\Pi^{\mu\nu}$ を表すファインマン・ダイアグラム．

さて，(7.7) から真空偏極項を作ってみよう．一つは質量項 $\frac{(ev)^2}{2}A_\mu A^\mu = \frac{1}{2}(ev)^2 g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu$ から，もう一つは「混合項」$evA_\mu\partial^\mu\phi_2$ を二乗したものから得られる．ファインマン図 7.1 の評価から真空偏極項は

$$
\begin{aligned}
i\Pi^{\mu\nu} &= i(ev)^2 g^{\mu\nu} + (-evk^\mu)\frac{i}{k^2}(evk^\nu) \\
&= i(ev)^2\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

となり，ゲージ不変性 $k_\mu\Pi^{\mu\nu} = k_\nu\Pi^{\mu\nu} = 0$ が成り立っていることが分かる．つまり光子が質量を持つことで QED のゲージ不変性が破れたように見えるが南部–ゴールドストーン粒子 ϕ_2 の寄与のおかげで系全体としてはゲージ不変性と矛盾していない，ということである．

ラグランジアン (7.7) の右辺第 3,4,5 項に注目すると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi_1^2 \\
&+\frac{1}{2}(ev)^2\left(A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu\phi_2\right)^2 + \cdots
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

とまとめられることが分かる．これを見るとゲージ場をあらためて

$$
B_\mu \equiv A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu\phi_2 \tag{7.13}
$$

と再定義すれば，場の強さテンソル $F_{\mu\nu}$ は形を変えず，南部–ゴールドストーン粒子 ϕ_2 は再定義したゲージ場 B_μ にその縦波成分として吸収されたと見なせる．このようにスカラー場 ϕ が真空期待値を取ることによってゲージ対称性が自発的に破れ，それに伴って現れた質量ゼロの南部–ゴールドストーン粒子がゲージ場の縦波成分として吸収され，ゲージ場が質量を獲得することをヒッグス機構という*3)．自発的対称性の破れの引き金をひくスカラー場 ϕ をヒッグス場，対称性が破れた後に現れる質量を持つスカラー場 (ϕ_1) をヒッグス粒子という．

*3)　この機構は南部によって最初に理解された．第 4 章の 4.7 節を参照されたい．

ゲージ場の置き換え (7.13) はゲージ場のゲージ変換そのもののように見える．式 (7.2) で与えたゲージ変換を

$$\phi \to \exp\left(i\frac{\phi_2}{v}\right)\frac{v+h}{\sqrt{2}}, \quad A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\left(\frac{\phi_2}{v}\right) \tag{7.14}$$

のように選ぶと南部–ゴールドストーン粒子 ϕ_2 は自発的対称性が破れた後のラグランジアンに現れない．つまりゲージ変換の自由度を用いて南部–ゴールドストーン粒子を理論から消去することができる．このようなゲージを「ユニタリ・ゲージ」という．

ここまでの議論を標準模型の場合に昇格させよう．標準模型のヒッグス場 ϕ は $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項であり，

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} \tag{7.15}$$

と取る．ヒッグス場のハイパーチャージ Y を $Y = \frac{1}{2}$ と選ぶと φ^+, φ^0 はそれぞれ電荷 $+1, 0$ を持つ複素スカラー場である．スカラーポテンシャル V は

$$V = \mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{7.16}$$

となり，$\mu^2 < 0$ でヒッグス場 ϕ の中性成分 φ^0 が真空期待値

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \tag{7.17}$$

を取るときに電弱対称性 $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ が $\mathrm{U}(1)_{EM}$ に自発的に破れる．このとき，ϕ を構成する 4 つの実場

$$\phi = \begin{pmatrix} \rho + i\xi \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h + i\eta) \end{pmatrix} \tag{7.18}$$

のうち ρ, ξ, η が質量ゼロの南部–ゴールドストーン粒子となり，弱ゲージボソン W^+, W^-, Z^0 の縦波成分として吸収される．南部–ゴールドストーン粒子を表す場 ρ, ξ, η を次のように θ^a $(a = 1, 2, 3)$ としてヒッグス場を書き直し，ユニタリ・ゲージ

$$\phi \to \phi = U\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h) \end{pmatrix}, \quad U = e^{i2\frac{\theta^a}{v}T^a} \tag{7.19}$$

(T^a は SU(2) の生成子）を選ぶとスカラー QED の際に見たようにゴールドストーン場 θ^a はラグランジアンから消去される．

7.2 電弱対称性の自発的破れと素粒子の質量

前節までの電弱対称性の自発的破れの議論を踏まえ，ここでは素粒子標準模

型においてゲージボソンやフェルミオンがどのように質量を獲得するのか解説する．すでに示したようにヒッグス場 ϕ は一般に 4 つの実数場と真空期待値

$$\phi = \begin{pmatrix} \rho + i\xi \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h + i\eta) \end{pmatrix} \tag{7.20}$$

で表される．ここで ρ, ξ, η は南部–ゴールドストーンボソンであり，ヒッグス機構によって $W^{\pm}, Z$ ボソンに吸収される．h はヒッグスボソンである．以下，ゲージボソンやフェルミオンが質量を獲得する過程ではヒッグス場の真空期待値だけが関係するので，

$$\phi \to \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{7.21}$$

とする．

7.2.1 ゲージボソン質量

ヒッグス場 ϕ とゲージボソンの相互作用は運動項 $|D_\mu \phi|^2$ で与えられる．共変微分 (6.53) より $W^{\pm}$ ボソンの質量項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mass}} &= \left| i \frac{g}{\sqrt{2}} \left(T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^- \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \frac{g^2}{2} \left(\frac{v}{\sqrt{2}} \right)^2 W_\mu^+ W^{\mu -} = m_W^2 W_\mu^+ W^{\mu -} \end{aligned} \tag{7.22}$$

となり，$W^{\pm}$ ボソンの質量 m_W は

$$m_W = \frac{gv}{2} \tag{7.23}$$

となる．次に中性ゲージボソン (A, Z) についてみる．先ず ϕ の真空期待値が入った成分は電荷ゼロの成分 φ^0 なので光子 A_μ とは相互作用しない．従って真空期待値は光子に質量を与えない．Z に関しては，φ^0 の弱アイソスピン第 3 成分が $I_3 = -\frac{1}{2}$，電荷 $Q = 0$ を考慮して

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mass}} &= \left| i g_Z (I_3 - Q \sin^2 \theta_W) Z_\mu \frac{v}{\sqrt{2}} \right|^2 \\ &= \left(\frac{g_Z v}{2\sqrt{2}} \right)^2 Z_\mu Z^\mu = \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \end{aligned} \tag{7.24}$$

となり，m_Z は

$$m_Z = \frac{g_Z v}{2} \tag{7.25}$$

で与えられる．

7.2.2 フェルミオン質量

フェルミオンの質量は湯川相互作用 (6.70) においてヒッグス場 ϕ が真空期待値を取ることで得られる．先ずレプトンの質量を見よう．

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= f_e\overline{L}e_R\phi + \text{h.c.}\\ &= f_e(\overline{\nu}_e \quad \overline{e}_L)e_R\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} + \text{h.c.}\\ &= f_e\frac{v}{\sqrt{2}}\overline{e}_Le_R + \text{h.c.}\end{aligned} \tag{7.26}$$

となるので，電子の質量 m_e は

$$m_e = f_e\frac{v}{\sqrt{2}} \tag{7.27}$$

で与えられる．d クォークの質量は $(\nu_e, e_L) \to (u_L, d_L)$, $e_R \to d_R$, $f_e \to f_d$ と置き換えて

$$m_d = f_d\frac{v}{\sqrt{2}} \tag{7.28}$$

となる．最後に u クォークの質量だが湯川相互作用のラグランジアンは $\phi^c = i\sigma_2\phi^*$ を考慮すると $(\varphi^{+*} = \varphi^-)$

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= f_u\overline{Q}u_R\phi^c + \text{h.c.}\\ &= f_u(\overline{u}_L \quad \overline{d}_L)u_R\begin{pmatrix} \varphi^{0*} \\ -\varphi^-\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{7.29}$$

となる．真空期待値 v は実数なので u クォークの質量項 m_u は

$$-\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = f_u\overline{u}_Lu_R\frac{v}{\sqrt{2}} + \text{h.c.} \tag{7.30}$$

より

$$m_u = f_u\frac{v}{\sqrt{2}} \tag{7.31}$$

で与えられる．結局，フェルミオンの質量は対応する湯川結合定数と真空期待値の積で与えられ，湯川結合定数と質量の大きさが比例関係にあること，即ちヒッグス場とより強く相互作用するフェルミオンがより大きな質量を持つことが分かる．

ここまではフェルミオンの世代については考えなかった．フェルミオンの世代まで含めて以上の議論を一般化するのは容易である．湯川結合定数とクォーク場に世代を区別する添字を付けてラグランジアンを書くと

$$-\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \overline{u}^i_LM^{ij}_uu^j_R + \overline{d}^i_LM^{ij}_dd^j_R + \text{h.c.} \tag{7.32}$$

となる．ここで $M^{ij}_a = f^{ij}_a\frac{v}{\sqrt{2}}$ $(a = u, d)$ を質量行列という．一般に質量行列

は非対角各成分を持つ．しかしアップ（u）型およびダウン（d）型それぞれの質量行列は適当なユニタリ行列で対角化され，質量固有値（実験で観測される質量）を得る．質量行列が対角化された後の状態を「質量固有状態」とし，添字 (m) を付けて最初の状態（カレント固有状態という）と区別すると両者の間の関係は

$$u_L = U_L^u u_L^{(\mathrm{m})},\ u_R = U_R^u u_R^{(\mathrm{m})},\ d_L = U_L^d d_L^{(\mathrm{m})},\ d_R = U_R^d d_R^{(\mathrm{m})} \tag{7.33}$$

で与えられる．つまりクォークの湯川相互作用のラグランジアンを質量固有状態で書き直すと

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{\mathrm{Yukawa}} &= \overline{u}_L^i M_u^{ij} u_R^j + \overline{d}_L^i M_d^{ij} d_R^j + \mathrm{h.c.} \\ &= \overline{u}_L^{(\mathrm{m})} \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} u_R^{(\mathrm{m})} \\ &+ \overline{d}_L^{(\mathrm{m})} \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} d_R^{(\mathrm{m})} + \mathrm{h.c.} \end{aligned} \tag{7.34}$$

となる．クォークの質量は一般性を失うことなく，正の実数に取ることができる．$W^{\pm}$ ボソンとクォークの相互作用ラグランジアン

$$\mathcal{L} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \overline{u}_L \gamma^\mu d_L W_\mu^- + \mathrm{h.c.} \tag{7.35}$$

を質量固有状態で表すと

$$\mathcal{L} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \overline{u}_L^{(\mathrm{m})} \gamma^\mu \left(U_L^{u\dagger} U_L^d \right) d_L^{(\mathrm{m})} W_\mu^- + \mathrm{h.c.} \tag{7.36}$$

となる．クォークの種類を区別する量子数をフレーバーと呼ぶが，一般に $U_L^{u\dagger} U_L^d \neq 1$ なので (u, c, t) クォークと (d, s, b) クォークは異なるフレーバー間で相互作用する．これをフレーバー混合行列もしくはカビボ–小林–益川行列

$$V_{\mathrm{CKM}} \equiv U_L^{u\dagger} U_L^d \tag{7.37}$$

と呼ぶ[35]．

7.3 ゲージボソンの質量と ρ パラメータ

式 (7.23), (7.25) で与えられる $W^{\pm}, Z$ ボソンの質量は $g_z = \frac{g}{\cos\theta_W}$ に注意すると

$$\rho \equiv \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2\theta_W} = 1 \tag{7.38}$$

を満たすことが分かる．また後に述べるように，実験データから非常によい精度で $\rho=1$ と見なせることが知られている．この節ではこの関係式 (7.38) が標準模型のゲージ対称性の下でのヒッグス場の表現の選び方によるものであることを紹介する．

これまでヒッグス場は $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ のもとでアイソスピン二重項 $(I = 1/2)$ であり，ハイパーチャージ $Y = 1/2$ を持つと考えてきた．これがどれほど妥当であるのかを調べるために，ヒッグス場の表現 (I, Y) を決めずに，ρ の一般的な関係式を求めてみよう．

$W^{\pm}$ ボソンの質量項は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{mass}} &\propto \left| i\frac{g}{\sqrt{2}}\left(T^+W_\mu^+ + T^-W_\mu^-\right)\langle\phi\rangle\right|^2 \\ &= \frac{g^2}{2}\left(T^+T^- + T^-T^+\right)\langle\phi\rangle^2 W_\mu^+W^{-\mu} \\ &= m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \end{aligned} \tag{7.39}$$

で与えられる．ここで $\langle\phi\rangle$ はヒッグス場 ϕ の真空期待値であり，SU(2) の二重項の場合 $\langle\phi\rangle = (0 \quad v/\sqrt{2})^{\mathrm{T}}$ であった（T は転置を表す）．ここで T^+, T^- は SU(2) の生成子 T^a $(a = 1, 2)$ の線形結合で定義されるが，

$$T^+T^- + T^-T^+ = 2\left\{\left(T^1\right)^2 + \left(T^2\right)^2\right\} = 2\left\{(T^a)^2 - \left(T^3\right)^2\right\} \tag{7.40}$$

と書き直すことができる．今 T^a は弱アイソスピン演算子であり，$(T^a)^2$ と T^3 の固有値は $I(I+1)$ と I_3 である．ヒッグス場の真空期待値を持つ成分は電荷ゼロなのでゲルマン–西島の公式より $I_3 = Y$ である．結局

$$m_W^2 = g^2\left\{I(I+1) - Y^2\right\}\langle\phi\rangle^2 \tag{7.41}$$

となる．

一方，Z ボソンの質量項は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{mass}} &\propto \left| ig_Z\left(I_3 - Q\sin^2\theta_W\right)\langle\phi\rangle Z_\mu\right|^2 \\ &= g_Z^2 I_3^2 \langle\phi\rangle^2 Z_\mu Z^\mu \\ &= \frac{m_Z^2}{2} Z_\mu Z^\mu \end{aligned} \tag{7.42}$$

なので $I_3 = Y$ より

$$m_Z^2 = 2g_Z^2 Y^2 \langle\phi\rangle^2 \tag{7.43}$$

となる．従って ρ パラメータは

$$\rho = \frac{\langle\phi\rangle^2\left\{I(I+1) - Y^2\right\}}{2\langle\phi\rangle^2 Y^2} \tag{7.44}$$

となる．標準模型では真空期待値を獲得してゲージボソンに質量を与えるヒッ

グスは 1 種類しかいないため，$\langle\phi\rangle^2 = \frac{v^2}{2}$ であり，$(I, Y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ なので $\rho = 1$ が満たされる．複数のヒッグス場がゲージボソンに質量を与える（真空期待値を持つ）場合を考えよう．それぞれの真空期待値，弱アイソスピン，ハイパーチャージを v_i, I_i, Y_i とすると (7.44) は

$$\rho = \frac{\sum_i \frac{v_i^2}{2}\left\{I_i(I_i+1) - Y_i^2\right\}}{2\sum_i \frac{v_i^2}{2} Y_i^2} \tag{7.45}$$

となる．複数の SU(2) 二重項ヒッグスが真空期待値を保つ場合，$(I_i, |Y_i|) = (1/2, 1/2)$ なので $\rho = 1$ となる．ハイパーチャージ Y の絶対値を取ったのは真空期待値を持つ中性成分が標準模型のヒッグス場と異なり弱アイソスピン $I_3 = +1/2$ を持つ可能性を考慮したためである．

もし $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項以外の表現に属するヒッグス場が真空期待値を持つとどうなるだろうか．別の表現の真空期待値を v'，弱アイソスピンとハイパーチャージをそれぞれ I', Y' とすると (7.45) は

$$\rho = \frac{\frac{v^2}{4} + \Delta_N}{\frac{v^2}{4} + \Delta_D}, \tag{7.46}$$

$$\Delta_N = \frac{v'^2}{2}\left\{I'(I'+1) - Y'^2\right\}, \quad \Delta_D = v'^2 Y'^2 \tag{7.47}$$

となる．例として $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項に加えて，三重項 $(I = 1)$ のヒッグス場が存在し，真空期待値 v' を持つとしよう．弱アイソスピン $I = 1$ に対して電荷 $Q = 0$ を実現するハイパーチャージは $Y = 0$ と $Y = 1$ もしくは -1 である．このときそれぞれの場合の ρ パラメータは

$$\rho_{(Y=0)} = 1 + 4\left(\frac{v'}{v}\right)^2, \quad \rho_{(Y=\pm1)} = 1 - 2\frac{\left(\frac{v'}{v}\right)^2}{1 + 4\left(\frac{v'}{v}\right)^2} \tag{7.48}$$

となり，真空期待値の比 $\frac{v'}{v}$ が十分に小さくない限り，ρ は 1 から大きくずれてしまう．このように $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項以外のヒッグス場が真空期待値を持つことは $\rho \neq 1$ より，厳しく制限される．$\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項以外に $\rho = 1$ を実現する例としては $\mathrm{SU}(2)_L$ の七重項 $(I = 3)$ でハイパーチャージが $Y = 2$ である場合が知られている[24]．

7.4 ヒッグスポテンシャルとカストディアル対称性

ヒッグスポテンシャル

$$V = \mu|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4 \tag{7.49}$$

を構成するヒッグス場 ϕ が $\mathrm{SU}(2)_L$ 二重項であるとしよう．ヒッグス場 ϕ は複素場なので実数場としての自由度は 4 であり，例えば次のように表される：

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}. \tag{7.50}$$

ヒッグスポテンシャルは $|\phi|^2$ のみで構成されるので,

$$|\phi|^2 = \frac{1}{2} \left(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 \right) \tag{7.51}$$

を不変とする O(4) 対称性を持つことが分かる.

ヒッグスポテンシャル V を次のようにヒッグス場 ϕ と $\phi^c = i\sigma_2\phi^*$ からなる (2×2) 行列 Φ で表してみよう:

$$\Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^c, \ \ \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi^{0*} & \phi^+ \\ -\phi^- & \phi^0 \end{pmatrix}. \tag{7.52}$$

すると

$$\mathrm{Tr} \left(\phi^\dagger \phi \right) = \sum_{i=1}^{4} \phi_i^2 \tag{7.53}$$

となり, ヒッグスポテンシャルは

$$V = \mu^2 \mathrm{Tr} \left(\Phi^\dagger \Phi \right) + \lambda \left\{ \mathrm{Tr} \left(\Phi^\dagger \Phi \right) \right\}^2 \tag{7.54}$$

となる. このポテンシャルは Φ に対する次の変換に対して不変である:

$$\Phi \to U \Phi V^\dagger. \tag{7.55}$$

つまり,

$$\mathrm{Tr} \left(\Phi^\dagger \Phi \right) \to \mathrm{Tr} \left(V \Phi^\dagger U^\dagger \cdot U \Phi V^\dagger \right) = \mathrm{Tr} \left(\Phi^\dagger \Phi \right) \tag{7.56}$$

である. ここで行列の積のトレースの公式 $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB) = \mathrm{Tr}(BCA)$ を使った. 図 7.2 に示したように, U による変換は Φ を構成する弱アイソスピンの上向き, 下向き成分間 (ϕ^{0*} と $-\phi^-$ 間, および ϕ^+ と ϕ^0 間) の混合に対応し, V による変換は ϕ^{0*} と ϕ^+ の間, そして $-\phi^-$ と ϕ^0 の間の混合に対応する. つまり U による変換はゲージ変換 $\mathrm{SU}(2)_L$ と見なしても差し支えない. 一方で V による変換の方は標準模型に対応するゲージ変換が存在しないのでグローバルな変換である. このようにヒッグスポテンシャル

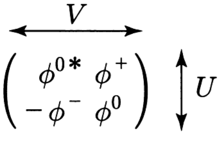


図 7.2 ヒッグス二重項の行列表示 (7.52) とユニタリ行列 U, V による成分の入れ替え.

は 2 つの SU(2) 変換 (U, V) を同時に施しても不変であり，このような対称性を大局的な $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R$ 対称性と呼ぶ．

標準模型のラグランジアンの一部である，ヒッグスポテンシャルだけに注目した場合，$\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R$ 対称性が存在することが分かった．ではヒッグス場の運動項ではこのような対称性は存在するだろうか．先ず Φ に対する共変微分 $D_\mu \Phi$ は次のように与えられる：

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + igW_\mu^a T^a \Phi - ig_Y B_\mu \Phi \frac{\sigma^3}{2}. \tag{7.57}$$

ここで $\mathrm{SU}(2)_L$ の生成子を T^a とした．右辺第 3 項の符号と，Φ と $\sigma^3/2$ の順序に注意すること．これは Φ の中の ϕ にはハイパーチャージ $Y = 1/2$ が，ϕ^c には $Y = -1/2$ が掛かるようにするためである．この共変微分を用いるとヒッグス場の運動項ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \mathrm{Tr}\, |D_\mu \Phi|^2 \tag{7.58}$$

となる．

このラグランジアンの対称性を調べてみよう．式 (7.55) の変換，$\Phi \to U\Phi V^\dagger$，において U を $\mathrm{SU}(2)_L$ ゲージ変換と見なすなら標準模型の $\mathrm{SU}(2)_L$ ゲージ対称性より $D_\mu \Phi$ は $\Phi \to U\Phi$ に対して

$$D_\mu \Phi \to U(D_\mu \Phi) \tag{7.59}$$

と変換するので，(7.58) は不変である．次に $\Phi \to \Phi V^\dagger$ の変換を調べよう．これはグローバルな変換なので共変微分は

$$D_\mu \Phi \to \left(\partial_\mu + igW_\mu^a T^a\right) \Phi V^\dagger - ig_Y B_\mu \Phi V^\dagger \frac{\sigma^3}{2} \tag{7.60}$$

となる．$D_\mu \Phi \to (D_\mu \Phi) V^\dagger$ となればラグランジアン (7.58) は $\mathrm{SU}(2)_R$ 変換に対しても不変になるが，$V^\dagger \frac{\sigma^3}{2} = \frac{\sigma^3}{2} V^\dagger$ は一般に保証されていないため，ラグランジアンは $\mathrm{SU}(2)_R$ 不変ではない．つまりヒッグスポテンシャルが持っていたグローバル $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R$ 対称性は運動項で破られており，その対称性は $g_Y \to 0$ の極限を取ったときに復活することが分かった．

しばらくの間 $g_Y = 0$ とおいて，ヒッグス場が真空期待値を持ったときにヒッグスポテンシャルの持っていた対称性はどうなるかを見てみよう．Φ の真空期待値を $\langle \Phi \rangle$ とすると (7.52) は

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \tag{7.61}$$

となり，U, V という 2 つの独立な SU(2) 変換の下での対称性が破れ，1 つの SU(2) 変換に関する対称性（これを $\mathrm{SU}(2)_V$ と表す）だけが残る：

$$\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R \to \mathrm{SU}(2)_V. \tag{7.62}$$

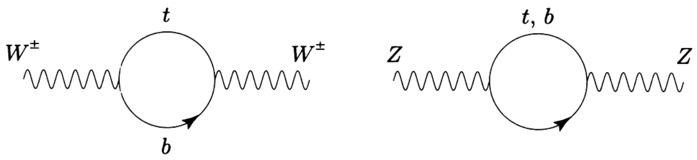


図 7.3 ρ パラメータに対する第三世代クォーク（トップ，ボトム）による輻射補正を表すファインマン・ダイアグラム．

この残ったグローバルな $\mathrm{SU}(2)_V$ 対称性をカストディアル対称性（Custodial symmetry）と呼ぶ．ヒッグス場が真空期待値を取って $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R$ が破れた結果，$\mathrm{SU}(2)_L$ ゲージボソン W^a $(a = 1, 2, 3)$ は質量を持つことになる．しかしカストディアル $\mathrm{SU}(2)_V$ 対称性が残っているために，“ゲージ場” W^1, W^2, W^3 は $\mathrm{SU}(2)_L$ が破れたあとも $\mathrm{SU}(2)_V$ 三重項として共通の質量を持つことが保証される．

運動項の議論で見たように，カストディアル対称性は $\mathrm{U}(1)_\mathrm{Y}$ ゲージ結合定数が $g_Y \neq 0$ のときに破られる．そのため W^1, W^2, W^3 は同じ質量を持つことがない．つまり $\mathrm{U}(1)_Y$ ハイパーチャージがなければカストディアル対称性によって $W^\pm$ と Z の質量は等しくなるのだが，ハイパーチャージのためにその関係は壊れる．その代わりに Z の質量に $\cos\theta_W$ を掛けたものが $W^\pm$ の質量に等しくなる $(\rho = 1)$.

標準模型のラグランジアンでヒッグス場が関係するのはヒッグス場の運動項，ヒッグスポテンシャル以外に湯川相互作用項がある．明らかに湯川相互作用のラグランジアンではカストディアル対称性は成り立っていないので，ρ パラメータは湯川相互作用による量子補正によっても破られる．湯川相互作用の大きさはフェルミオン質量の大きさに比例するため，第三世代のクォーク (t, b) による寄与が $\rho = 1$ を大きく破る．ρ に対する量子補正を $\Delta\rho = \rho - 1$ と表すと図 7.3 のファインマン・ダイアグラムの計算より

$$\Delta\rho = \frac{3G_F}{8\pi^2\sqrt{2}}\left(m_t^2 + m_b^2 - 2\frac{m_t^2 m_b^2}{m_t^2 - m_b^2}\ln\frac{m_t^2}{m_b^2}\right) \tag{7.63}$$

が得られる．ここで G_F はフェルミ結合定数，m_t, m_b はそれぞれトップおよびボトム・クォークの質量である．フェルミ結合定数は $\mathrm{SU}(2)_L$ ゲージ結合定数 g，$W^\pm$ ボソン質量 m_W と

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} \tag{7.64}$$

で関係づいている．式 (7.63) の $\Delta\rho$ はトップ・クォークおよびボトム・クォークの，ヒッグスボソンとの湯川相互作用の大きさの対称性の破れを表している．つまりトップ・クォークとボトム・クォークの湯川結合定数が等しくなる極限で $\Delta\rho$ はゼロになる．これを確認するため，$m_t^2 \equiv m_b^2(1 + \epsilon)$ としてこれ

を (7.63) に代入しよう．微小量 ϵ に対して $\ln(1+\epsilon) \approx \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} + \cdots$ となることに注意して $\Delta\rho$ を展開すると

$$
\begin{aligned}
\Delta\rho &= \frac{3G_F}{8\pi^2\sqrt{2}} \left\{ m_b^2(1+\epsilon) + m_b^2 - 2\frac{m_b^4(1+\epsilon)}{m_b^2\epsilon} \ln(1+\epsilon) \right\} \\
&\approx \frac{3G_F}{8\pi^2\sqrt{2}} m_b^2 \left\{ 2 + \epsilon - 2\frac{1+\epsilon}{\epsilon} \left(\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} + \cdots \right) \right\} \\
&= \frac{3G_F}{8\pi^2\sqrt{2}} m_b^2 \left\{ \frac{1}{3}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \right\} \\
&\approx \frac{3G_F}{8\pi^2\sqrt{2}} m_b^2 \left(\frac{m_t^2 - m_b^2}{3m_b^2} \right)^2
\end{aligned}
\tag{7.65}
$$

となり，$m_t \to m_b$ の極限で $\Delta\rho \to 0$ となることが分かる．

第 8 章
電弱対称性の自発的破れの実験的検証

ゲージ対称性の自発的破れという現象は 1990 年代から今日にいたる，高エネルギー加速器実験において見事に検証されてきた．本章では電弱対称性の破れを中心に，素粒子標準模型がどのようにテストされ，その正当性が確認されてきたのかを概観し，LHC 実験におけるヒッグス粒子の探索およびその性質の検証（ヒッグス機構の検証）について紹介する．

8.1 素粒子標準模型の検証

これまで行われてきた素粒子実験において，標準模型の予言と深刻な矛盾を示すものはない．標準模型を検証する，様々な物理量に対する高精度の測定を「電弱精密測定（Electroweak precision measurements)」，もしくは「電弱精密検証（Electroweak precision tests)」と呼ぶ．電弱精密測定の代表的な物理量を表 8.1 にまとめる．これ以外の物理量については文献 [15] を参照されたい．ここで取り上げた 5 つの物理量は以下のとおりである．

m_Z ：Z ボソンの質量

Γ_Z ：Z ボソンの全崩壊幅

σ_h ：電子・陽電子衝突によるハドロン対生成断面積（実際にはクォーク対の生成断面積）

R_ℓ ：Z ボソンのレプトン対への崩壊率 Γ_ℓ とハドロン（クォーク）への崩壊率 Γ_h の比 ($R_\ell \equiv \frac{\Gamma_h}{\Gamma_\ell}$)

$A_{\rm FB}^{0,\ell}$ ：電子・陽電子対消滅からレプトン対生成過程 ($e^+e^- \to \ell^+\ell^-$) における，前方後方非対称性．同過程の微分断面積 $\frac{d\sigma}{d\cos\theta}$ を用いて

$$A_{\rm FB}^{0,\ell} \equiv \frac{\int_0^1 d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\cos\theta} - \int_{-1}^0 d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\cos\theta}}{\int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\cos\theta}}$$

で定義される．

表 8.1 代表的な電弱精密測定の実験データ[15]と標準模型の予言[16]の比較．

観測量	実験データ	SM の予言	pull
m_Z (GeV)	91.1875 ± 0.0021	—	—
Γ_Z (GeV)	2.4952 ± 0.0023	2.4958	−0.25
σ_h (nb)	41.540 ± 0.037	41.478	1.67
R_ℓ	20.767 ± 0.025	20.743	0.98
$A_{\mathrm{FB}}^{0,\ell}$	0.01714 ± 0.00095	0.01647	0.71

表 8.1 にある "pull" というパラメータについて説明しよう．ある物理量 $\mathcal{O}$ の測定値は $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}} + \delta\mathcal{O}$ のように，中心値 $\overline{\mathcal{O}}$ と誤差 $\delta\mathcal{O}$ で与えられる．このとき

$$\text{pull} \equiv \frac{\overline{\mathcal{O}} - \mathcal{O}^{\text{th}}}{\delta\mathcal{O}} \tag{8.1}$$

で定義される量を pull と呼ぶ．ここで $\mathcal{O}^{\text{th}}$ は理論（模型）による物理量 $\mathcal{O}$ の予言値である．つまり実験の測定値（中心値）と理論の予言値のずれが測定誤差の何倍か，を評価したものである．

表 8.1 にあげた物理量の測定精度は概ね 1% 以下である．このような高精度の実験結果は何をもたらすだろうか？ ある模型による物理量の理論的予言 $\mathcal{O}^{\text{th}}$ は，実験によって測定された $\overline{\mathcal{O}} \pm \delta\mathcal{O}$ と比較し，矛盾の有無を見ることで模型の正当性が検証される．実験データには一般に誤差が伴うが，実験の精度の向上に伴って誤差は縮小し，中心値も概ねその範囲で変化する．一方，理論の予言が摂動論のような近似計算に基づいている場合，その予言は近似の精度を上げるとともに変化する．従って理論の予言を実験と比較する場合は，実験の精度向上に伴って理論計算の精度もあげなくては正しく理論の正当性を検討できない．

素粒子標準模型の場合，電弱相互作用による量子補正はツリーレベル*1)に対して典型的に $\alpha(m_Z) \sim 1/128$ 程度の大きさとなる．従って電弱精密測定によって様々な物理量が 1% 以下の精度で測定されるなら，それは標準模型を量子補正のレベルでテストすることを可能にする．そのような高精度の実験データは 1989 年から 2001 年まで CERN の LEP（Large Electron Positron collider）というコライダーで行われた実験で得られた*2)．LEP 実験では図 8.1 のようなファインマン・ダイアグラムで表される電子・陽電子対衝突によるフェルミオン対生成過程を調べた．これは光子および Z ボソンによる媒介で

*1） 摂動展開の最低次で，ファインマン・ダイアグラムに閉線（ループ）が現れないもの．

*2） 衝突エネルギーを Z ボソン質量にあわせて行った実験は 1995 年まで行われた．その後は衝突エネルギーを最終的には 209 GeV まで上げながらヒッグス粒子探索を行った．残念ながらヒッグス粒子生成にはエネルギーが足らず，発見には至らなかったがヒッグス粒子の質量が 114GeV より大きいという下限を与え，その後の LHC でのヒッグス粒子発見に貢献した．ちなみに LHC はもともと LEP を設置していたトンネルに設置された．

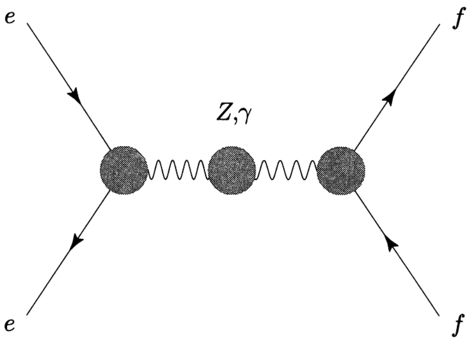


図 8.1　電子・陽電子対衝突によるフェルミオン対生成過程を表すファインマン・ダイアグラム．

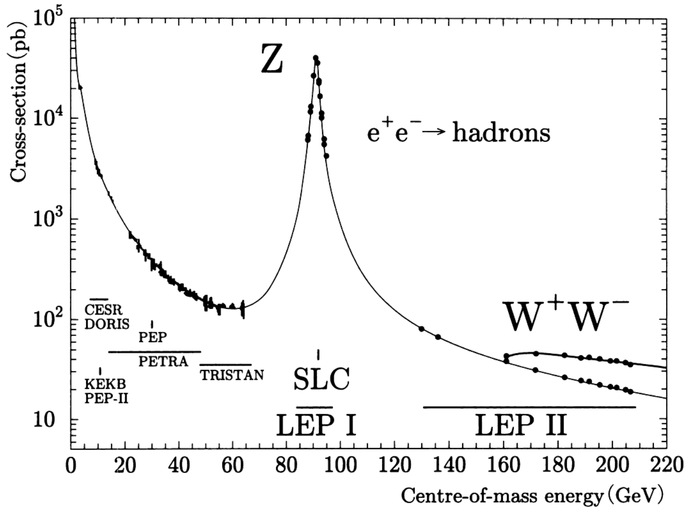


図 8.2　e^+e^- 対消滅によるハドロン対生成断面積の，e^+e^- 衝突エネルギー依存性[15]．

起きる過程である．電子と陽電子の衝突エネルギー E を Z ボソンの質量 m_Z に合わせると $E = m_Z c^2$ によって Z ボソンの生成される確率が飛躍的に増大し，たくさんの Z ボソンを介した現象（今の場合はフェルミオン対生成）が観測される．LEP 実験では最終的には 1700 万にも上る Z ボソン崩壊イベントを観測した．エネルギー保存則から，この過程において終状態に現れる粒子対は（フェルミオンに限らず）その質量和が Z ボソン質量以下であるものに限定される．標準模型では全てのトップ・クォークを除く 5 種類のクォークと，全てのレプトンが終状態に現れる．

始状態のエネルギーが Z ボソン質量（約 91 GeV）なので，この実験ではトップ・クォーク（質量約 170 GeV）やヒッグス粒子（約 125 GeV）の直接的な生成はない．しかしこれら重い粒子は図 8.3 のような 1 ループのファインマン・ダイアグラムで表される摂動の高次補正（量子補正）を通して物理量に寄

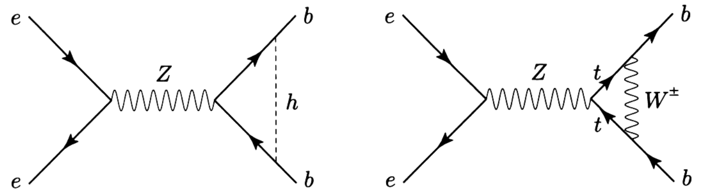


図 8.3　$e^+e^- \to b\bar{b}$ 過程に対する 1 ループ補正を表すファインマン・ダイアグラム．ヒッグス粒子による寄与（左）とトップ・クォークによる寄与（右）．

与する．そのため電弱精密測定ではトップ・クォークやヒッグス粒子の発見以前に量子補正を通じてこれらの質量を間接的に調べることが可能だった．またトップ・クォークやヒッグス粒子以外に，「標準模型を超える」素粒子が存在する場合，それが Z ボソンよりも軽ければ終状態に現れるであろうし，Z ボソンより重い場合でもトップ・クォークやヒッグス粒子のように，量子補正を通じて物理量に影響をあたえるので，実験データと標準模型の予言の「ずれ」として我々の前に姿を現わすはずである．

電弱精密測定による標準模型の包括的な検証結果については文献 [15] に詳しいが，ここではそのうちのいくつかについて結果を紹介しよう．先ず Z ボソンの全崩壊幅 Γ_Z は直接実験で（つまり理論や模型とは独立に）決定することのできる量である．一方，理論的には Z ボソンはハドロン（つまりクォーク），レプトンそしてそれ以外の粒子に壊れることができると予想される．そこで Z ボソンの全崩壊幅をそれぞれの崩壊先への崩壊率の和として表そう：

$$\Gamma_Z = \Gamma_h + \Gamma_\ell + \Gamma_{\text{inv}}. \tag{8.2}$$

ここで右辺は順に Z ボソンのハドロン対，荷電レプトン対，そして見えない（不可視，invisible）粒子への崩壊率を表す．「見えない（不可視）粒子」とは検出器に信号を残さない，即ち電磁相互作用や強い相互作用をしない粒子である．その崩壊率 Γ_{inv} は直接実験装置で測定することができず，

$$\Gamma_{\text{inv}} = \Gamma_Z - \Gamma_h - \Gamma_\ell \tag{8.3}$$

のように，全崩壊幅から観測可能な終状態への崩壊率（崩壊幅）を差し引くことで得られる．標準模型ではニュートリノが Γ_{inv} を与えるのでデータと標準模型の予言を比較することで Z ボソンと相互作用するニュートリノの種類（世代）の数を調べることができる．

LEP 実験では Γ_{inv} とレプトン対への崩壊率 Γ_ℓ の比を取ることで両者に共通の測定誤差がキャンセルし，不定性を減らしている．その比は $R^0_{\text{inv}} \equiv \frac{\Gamma_{\text{inv}}}{\Gamma_\ell}$ と定義され，データは

$$R^0_{\text{inv}} = 5.943 \pm 0.016 \tag{8.4}$$

である．一方，標準模型では荷電レプトン対への崩壊率に対するニュートリノ対への崩壊率の比が

$$\frac{\Gamma_\nu}{\Gamma_\ell} = 1.99125 \pm 0.00083 \tag{8.5}$$

と与えられる．この理論の予言値に不定性が付いているのは値を評価する際に用いたトップ・クォークの質量 $m_t = 178.0 \pm 4.3\,\mathrm{GeV}$ およびヒッグス粒子の質量 $m_h = 100\sim1000\,\mathrm{GeV}$ の不定性に起因している．

ニュートリノの世代数を N_ν とすると，実験データ (8.4) が全ての不可視粒子への崩壊率を表すのに対し，標準模型の予言 (8.5) は $N_\nu = 1$ に対するものである．Z ボソンと相互作用するニュートリノの質量がニュートリノの世代によらずゼロと見なせるとき，実験データ (8.4) と模型の予言 (8.5) を N_ν 倍したものとの比較から

$$N_\nu = 2.9840 \pm 0.0082 \tag{8.6}$$

が得られる．これにより，ニュートリノは直接観測できないにも関わらずその世代数が 3 であることが分かった*3)．またこのニュートリノの世代数を考慮すると標準模型における Γ_Z の予言は表 8.1 にあるように実験データと一致しており，Z ボソンがクォークやレプトン以外の「標準模型を超える」素粒子に崩壊する可能性は厳しく制限されている．

すでに述べたように LEP 実験での電子陽電子対衝突過程に対してトップ・クォークやヒッグス粒子は量子補正を通じて寄与する．ということは，実験データと標準模型の（量子補正を含めた）予言を比較することで，トップ・クォークやヒッグス粒子の質量に対する制限が得られる，ということである．図 8.4 は電弱精密測定のデータと標準模型の予言を比較したものである．使用したデータは表 8.1 に挙げたものに加え，関連する全部で 15 個の観測量を用いており，m_Z スケールでの QED および QCD のゲージ結合定数およびトップ・クォーク質量 m_t，ヒッグスボソン質量 m_h を変化させ次の χ^2 関数*4)

$$\chi^2 \equiv \sum_i \left(\frac{\overline{\mathcal{O}}_i - \mathcal{O}_i^{\mathrm{th}}}{\delta \mathcal{O}_i} \right)^2 \tag{8.7}$$

が最も小さくなるような m_t, m_h の組合せを探す．その結果は図 8.4 のとおりである．最も大きな等高線はトップ・クォークとヒッグス粒子の質量を知らずに（m_t, m_h の実験データを使わない）にデータをフィットした結果（誤差 1 σ に相当，以下同様）を示している．次に小さな等高線はトップ・クォークの質量のデータを用いた場合の結果であり，トップ・クォーク，ヒッグス粒子の質

*3) ただし，これは質量が Z ボソンの質量の半分以下である素粒子に対して適用できる議論である．もし 4 世代目のニュートリノが存在し，その質量が $m_Z/2$ より大きくても，その可能性を排除できない．

*4) 関係する複数の観測量の，誤差の間の相関も考慮している．

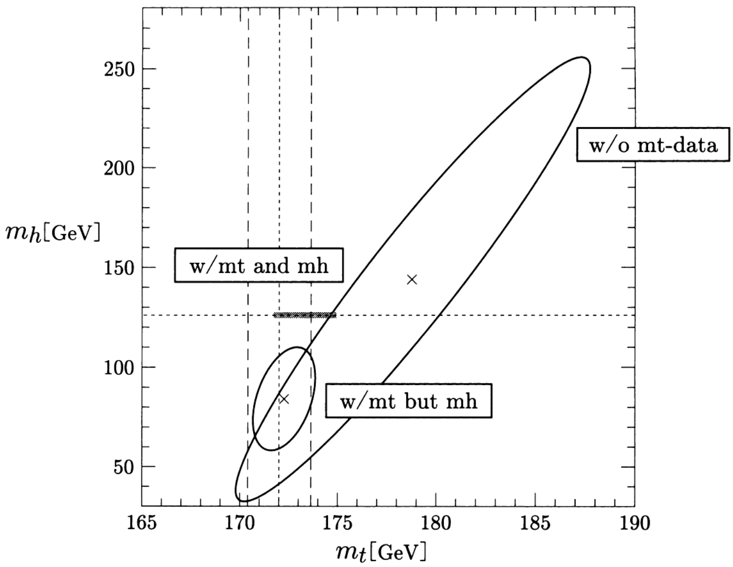


図 8.4　トップ・クォーク質量 m_t とヒッグス粒子質量 m_h に対する電弱精密測定のデータからの制限．×印は実験データのベストフィット（χ^2 関数が最も小さくなる場合）を表す．等高線はそれぞれ (m_t, m_h) に対する 1 σ の制限を表す．垂直方向，水平方向の破線で挟まれた領域はトップ・クォーク，ヒッグスボソン質量の実験データを 1 σ の誤差付きで示したものである．

量の実験データを用いてフィットした場合の結果はほぼ $m_h = 125\,\mathrm{GeV}$ 付近の水平線に重なっている．これが 2 番目の等高線（m_t を与え，m_h を与えない）の 1 σ 許容領域と重なっていないのは，電弱精密測定データから間接的に得られるヒッグス粒子質量のベストフィット（約 80 GeV）が，実際に発見されたヒッグス粒子の質量（約 125 GeV）と離れているためである．

図の垂直および水平方向に描いた破線のバンドは実際に測定されたトップ・クォークおよびヒッグス粒子質量の測定値を 1 σ の誤差込で表したものである．ここで m_t, m_h の実験データを使わなくても（即ちこれらが発見されていなくても），すでにこれらの実際の質量をその等高線の範囲に含んでいることを強調しておく．エネルギーが十分に高くなくても測定の精度をあげることで直接生成が見込めない「重い粒子」の質量スケールについてかなり絞りこめるのである．

8.2 ヒッグス粒子探索実験の概観

ヒッグス粒子は長年にわたる探索の末，2012 年に CERN の加速器 LHC において発見された．ヒッグス粒子を発見し，その質量を決定したのは ATLAS および CMS という 2 つの実験グループであり，その結果は[17],[18]

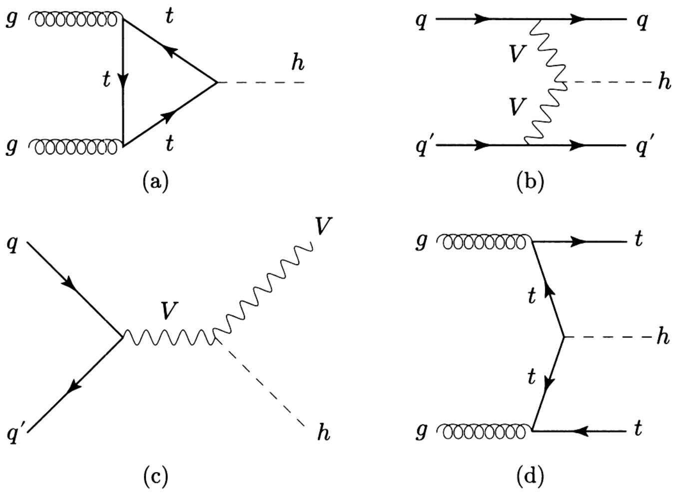


図 8.5 陽子・陽子衝突における代表的なヒッグス粒子生成過程のファインマン図. (b), (c) で V は電弱ゲージボソン $W^{\pm}$ もしくは Z を表し，クォーク q, q' は電弱ゲージボソンとの相互作用において電荷が保存されるように選ばれる.

$$m_h = \begin{cases} 126.0 \pm 0.4 \pm 0.4\,\mathrm{GeV} & \text{(ATLAS)} \\ 125.3 \pm 0.4 \pm 0.5\,\mathrm{GeV} & \text{(CMS)} \end{cases} \tag{8.8}$$

である．ここで右辺第 2，第 3 項はそれぞれ統計誤差，系統誤差を表す．

LHC では高エネルギーに加速した陽子同士を正面衝突させてヒッグス粒子を生成する．陽子はクォークおよびグルーオンから構成されるので，クォーク同士の散乱やグルーオンの対消滅などによってヒッグス粒子は生成される．代表的なヒッグス粒子生成過程のファインマン・ダイアグラムを図 8.5 にまとめる*5)．

図 8.5 (a) のグルーオン対消滅によるヒッグス粒子生成は 1 ループ量子補正を通した過程となる．$\mathrm{SU}(3)_C$ ゲージボソンであるグルーオンがカラーを持つ粒子とのみ相互作用するのに対してヒッグス粒子はカラー量子数を持たないため，ヒッグス粒子とグルーオンは直接相互作用することができないからである．標準模型では図 8.5 (a) のように主にトップ・クォークの交換による 1 ループ・ダイアグラムを通してグルーオン対消滅によるヒッグス粒子生成が起きるが，標準模型を超える素粒子模型ではこれらに加えてその模型が予言する新しい素粒子が 1 ループ・ダイアグラムに現れる場合がある．

グルーオン対消滅過程の他に，図 8.5 (b) のように始状態のそれぞれのクォークから放出された $W^{\pm}, Z$ ボソンが対消滅し，ヒッグス粒子が生成される過程がある．図 8.5 (c) は「随伴生成」と呼ばれ，クォーク・反クォーク対消滅で生成された $W^{\pm}, Z$ ボソンがヒッグス粒子を放出する過程である．最後に

*5) それぞれの生成過程を「生成チャネル」と呼ぶ．

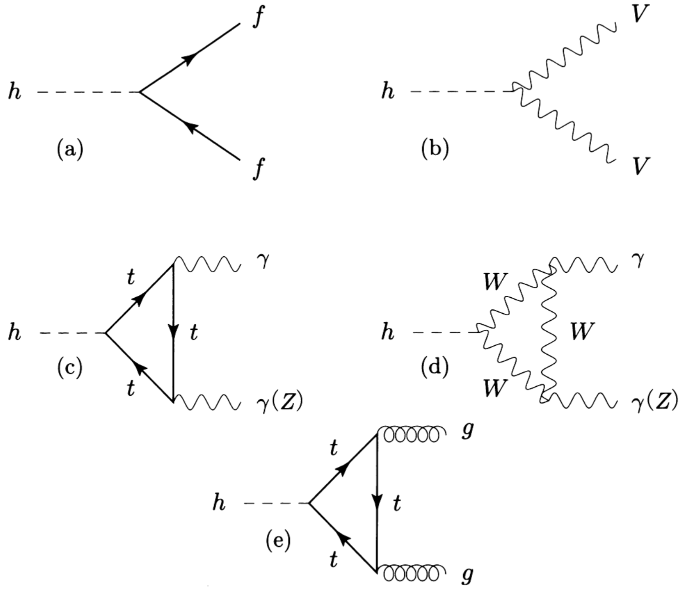


図 8.6 ヒッグス粒子の代表的な崩壊過程を表すファインマン・ダイアグラム．

図 8.5 (d) のような，始状態のグルーオン対がそれぞれトップ・クォーク対を放出し，トップ・クォークと反トップ・クォークの対消滅によってヒッグス粒子を生成する過程がある．

図 8.5 にまとめた様々な過程で生成されたヒッグス粒子は直ぐにより軽い粒子対へ崩壊する．ヒッグス粒子の代表的な崩壊過程を表すファインマン・ダイアグラムを図 8.6 にまとめる．この中でヒッグス粒子が 2 つの光子へ崩壊する過程 $(h \to \gamma\gamma)$ は，ヒッグス粒子が電荷を持たないため，グルーオン対による生成過程同様，主にトップ・クォークもしくは $W^{\pm}$ ボソンによる 1 ループ・ダイアグラムによって実現される．

5.1.2 節で議論したようにヒッグス粒子の持つ 4 元運動量を q，崩壊先の粒子対の 4 元運動量を p_1, p_2 とすると 4 元運動量保存則 $q = p_1 + p_2$ の両辺を二乗して

$$q^2 = (p_1 + p_2)^2 = m_h^2 \tag{8.9}$$

を得る．一般に，陽子・陽子衝突の結果出てくる終状態の 2 つの粒子 1, 2 は様々な 4 元運動量 p_1, p_2 を持つ．陽子・陽子衝突によって光子対が生成される度に p_1, p_2 を測定し，その不変質量 $m_{\gamma\gamma} \equiv \sqrt{(p_1 + p_2)^2}$ の分布を求めると $m_{\gamma\gamma}$ の値毎に観測されるイベント数は連続的に変化する（不変質量の値が小さなイベントが多く，値が大きなイベントは少ない）．しかしもし 2 つの粒子がヒッグス粒子の崩壊によるものならば，そのときの $m_{\gamma\gamma}$ は (8.9) によって決まった値 (m_h) を示すはずである．

図 8.7 は ATLAS グループが測定した陽子・陽子衝突による光子対生成過程

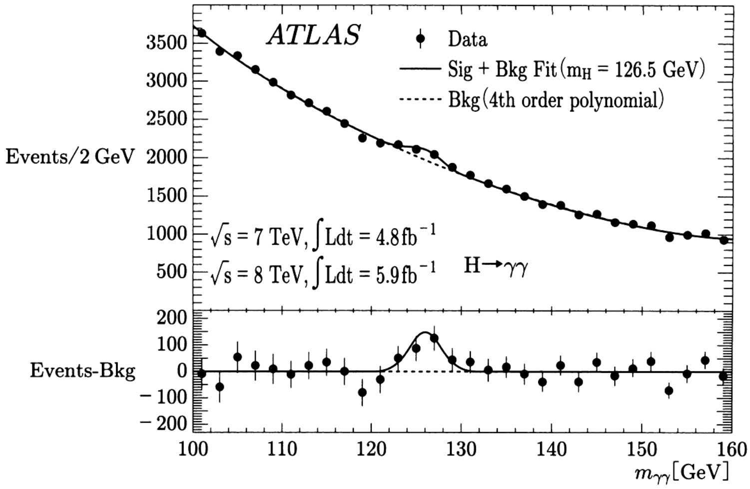


図 8.7 ATLAS 実験で得られた光子対の不変質量 ($m_{\gamma\gamma}$) 分布．黒い点が測定された各不変質量の値毎のイベント数を表し，点線はヒッグス粒子生成が起きていない場合の予想曲線を表す．$m_{\gamma\gamma} \sim 125\,\mathrm{GeV}$ あたりでピークが見える[19]．

における，光子対不変質量に対するイベント数をプロットしたものである．光子対がヒッグス粒子の崩壊により放出された場合，その不変質量は (8.9) を満たす．これはヒッグス粒子が生成されない，一般の過程で放出された光子対の不変質量が「偶然」その値になった場合に加わる．そのため不変質量に対するイベント数の分布を作ってみると不変質量が m_h のところでピークが現れる．図 8.7 では光子対の不変質量 $m_{\gamma\gamma}$ が 125 GeV 程度のところでヒッグス粒子生成を伴わない場合（バックグラウンドと呼ばれる）に予想されるイベント数分布（点線）からずれて小さなピークを示しており，これがヒッグス粒子発見の証拠となった．

標準模型では，全ての素粒子の質量はゲージ対称性の自発的破れとヒッグス機構によって与えられる．すでに紹介したようにフェルミオン f の質量 m_f は

$$m_f = f\frac{v}{\sqrt{2}} \tag{8.10}$$

で，またゲージボソン $V(=W^\pm, Z)$ の質量 m_V は

$$m_V = \frac{g_V v}{2} \tag{8.11}$$

で与えられる．ここで g_V は $W^\pm$ ボソンの場合は g，Z ボソンの場合は g_Z となる．従ってそれぞれの結合定数は適当に規格化すると

$$\frac{f}{\sqrt{2}} = \frac{m_f}{v}, \quad \frac{g_V}{2} = \frac{m_V}{v}, \tag{8.12}$$

のように，粒子の質量とヒッグス場の真空期待値の比で与えられるため，粒子

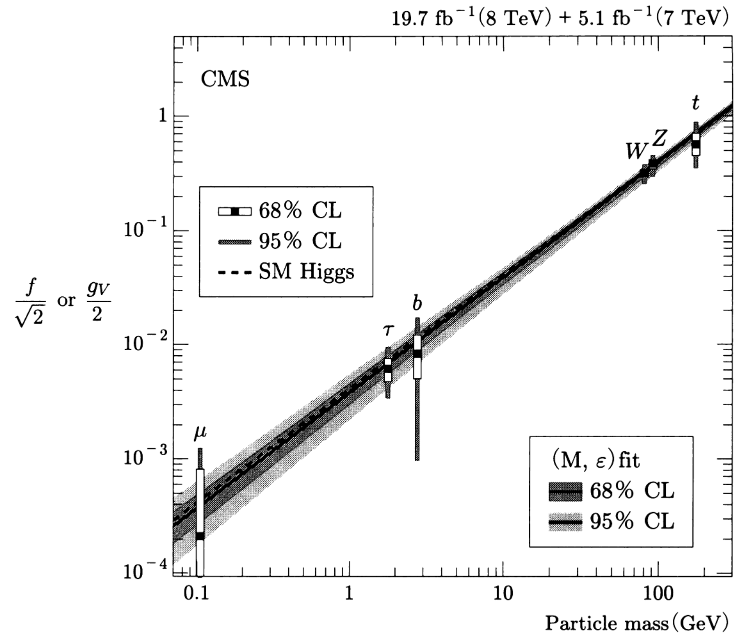


図 8.8 ヒッグス粒子とクォーク，レプトン，ゲージボソンとの結合定数[20].

の質量に対する結合定数の大きさはある傾きの直線上に並ぶことになる．これが全ての素粒子の質量がヒッグス場の真空期待値によって与えられる場合の予言である．図 8.8 は CMS グループによる，LHC でのヒッグス粒子の崩壊過程を調べた結果である[20]．ヒッグス粒子がトップ・クォーク，$W^{\pm}, Z$ ボソン，ボトム・クォーク，τ, μ レプトンに崩壊する場合の実験データから，それぞれの粒子とヒッグス粒子との結合定数の大きさを求めたものである．標準模型の場合の予言は黒い点線で示されている．まだ b クォークや μ レプトンとの結合定数の測定値に相対的に大きな誤差が見られるが，現状では測定誤差の範囲で標準模型の予言と無矛盾である．

ヒッグス粒子の生成崩壊で得られるデータからヒッグス粒子と他の粒子との結合定数の情報を引き出すため，標準模型の結合定数からのずれを表すスケール因子 κ_i を導入する[22]．例えばヒッグス粒子が $W^{\pm}$ ボソン対や Z ボソン対へ崩壊する場合，

$$\frac{\Gamma_{WW^{(*)}}}{\Gamma^{\rm SM}_{WW^{(*)}}} \equiv \kappa_W^2, \quad \frac{\Gamma_{ZZ^{(*)}}}{\Gamma^{\rm SM}_{ZZ^{(*)}}} \equiv \kappa_Z^2, \tag{8.13}$$

などである（他のクォークやレプトンの場合も同様である）．定義より，標準模型は $\kappa_i = 1$ の場合に相当する．前章で ρ パラメータについて紹介したが，それは $W^{\pm}$ と Z の質量の間の関係式であった．これはゲージ場とヒッグス場の 4 点相互作用で，ヒッグス場が真空期待値を取ったものなので，本質的にゲージ場とヒッグス場の結合定数の関係であるとも言える．すでに電弱精密測定実験

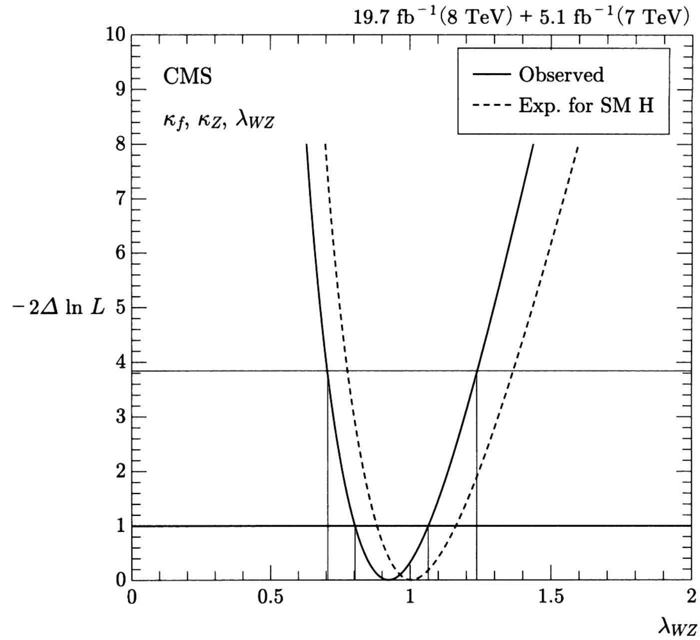


図 8.9　ヒッグス粒子と $W^{\pm}, Z$ ボソンとの結合定数[20].

で ρ はほとんど 1，即ちヒッグスとゲージ場の結合定数の普遍性が示され，カストディアル対称性の破れが十分小さいことが示されていた．LHC ではヒッグス粒子のゲージボソンと直接相互作用する過程を測定できるので，電弱精密測定実験とは独立に，カストディアル対称性の存在を検証することが可能である．図 8.9 は CMS グループによる，ヒッグス粒子の生成崩壊データから得られる $\lambda_{WZ} = \kappa_W/\kappa_Z$ への制限を示したグラフである．スケール因子 κ_f, κ_Z そして λ_{WZ} をパラメータとして変化させ，全ての実験データをフィットした結果である．縦軸の $-2\Delta \ln L$ は実験データとフィットした値の乖離を示す量であり，$-2\Delta \ln L = 0$ となる横軸の値が最も実験データをよく説明する値である．破線で表した曲線は標準模型の予言である．実線のカーブで $\lambda_{WZ} = 0.92$ が最もよく実験データを説明することを示しており，これは標準模型の予言である $\lambda_{WZ} = 1$ にきわめて近い．即ちヒッグス粒子の生成崩壊の直接探索実験でも ρ パラメータがカストディアル対称性によって $\rho = 1$ から大きくズレることがない，ということを示している．

標準模型ではヒッグス粒子のスピンは 0，パリティは + (even, 偶) であり，両者を併せて 0^+ と表記される．LHC で発見された新粒子がヒッグス粒子が担うスピンとパリティを持つかどうかのテストの結果について簡単に述べる．先ずこの新粒子は光子対への崩壊 $(h \to \gamma\gamma)$ が確認されている．光子はスピン 1 を持つため，終状態の合成スピン S は 2 もしくは 0 である．終状態は 2 体系のため，相対軌道角運動量 L を持つがその値は $L = 0, 1, 2 \cdots$ と，整数に限ら

れる．量子力学では全角運動量 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ が保存量であるが，終状態の J が整数になるためには始状態のスピンは整数でなくてはならない．もし始状態のスピンが 1 ならば，終状態のスピン 1 を作るためには相対軌道角運動量 $L = 1$ が要求される．一方，2 体系のパリティ P は各粒子のパリティ P_1, P_2 と角運動量を用いて

$$P = (-1)^L P_1 P_2 \tag{8.14}$$

で与えられる．終状態は光子対なので $P_1 P_2$ は常に偶であるが，$L = 1$ より系全体のパリティは奇となる．これは 2 つの光子の入れ替えに対して系全体の波動関数が反対称であることを示す．しかし終状態は光子対であり，同種粒子からなる系であるため，ボース対称性（入れ替えに対して波動関数が完全対称）を満たさなくてはならず，$L = 1$ はこれに矛盾してしまう．従って始状態がスピン 1 であることは排除される．図 8.10 はスピン・パリティ J^P に感度の高い検定統計量 $\tilde{q}$ の分布を 0^+ とそれ以外（$0^-, 2^+$）の場合で求め，観測値と比較したものである．いずれの場合も観測値（垂直実線）は 0^+（右の山の分布）を支持していることが分かる．

8.3 最後に

以上のように LHC 実験で発見された新粒子の性質は標準模型が予言するヒッグス粒子のそれと無矛盾であることがこの数年で分かってきた成果である．もちろん今後の実験で更なる高い精度での検証が必要であることは言うまでもないが，現状では電弱ゲージ対称性の自発的破れとヒッグス機構が実験的に検証されたと言ってもよさそうである．

一方，標準模型はこれで「完成」と言ってよいのであろうか．予言されていた全ての粒子が発見され，相互作用も摂動論の高次の効果まで含めて実験結果と矛盾がなく，突っ込みどころがないようにも見える．標準模型のヒッグスポテンシャル

$$V = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \tag{8.15}$$

において，無次元の結合定数 λ はヒッグス粒子の質量 m_h と

$$m_h^2 = 2\lambda v^2 \tag{8.16}$$

という関係にある．この λ は量子補正によってエネルギー・スケールに依存した量となる．そのスケール依存性は「くりこみ群方程式」によって完全に決まってしまう．

さて，標準模型によると λ のくりこみ群方程式はヒッグス粒子自身による寄与（λ のべきに比例）とトップ・クォークによる寄与（湯川結合定数 f_t のべき

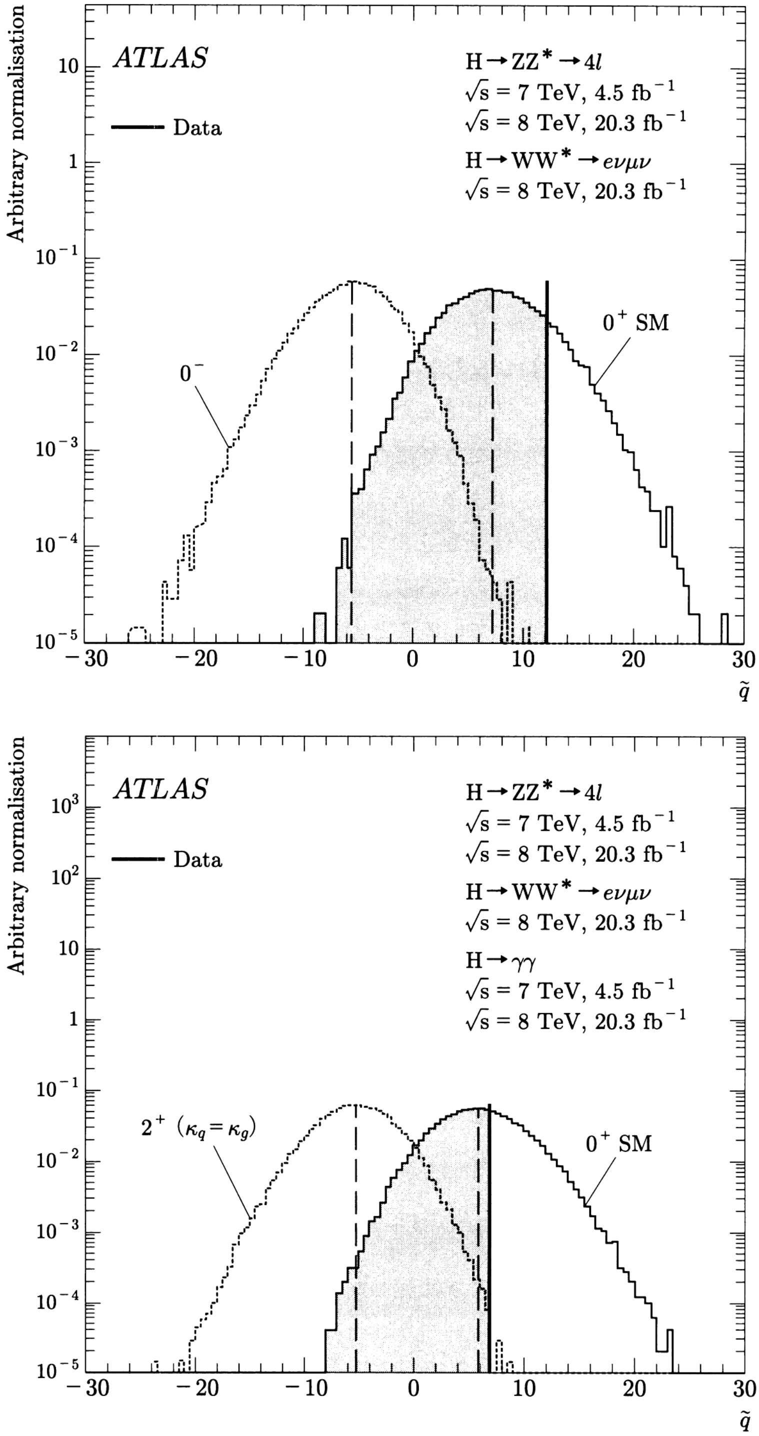


図 8.10 LHC で発見された新粒子のスピンおよびパリティを区別するための検定統計量 $\tilde{q}$ の分布．それぞれ 2 つのことなるスピン・パリティの組合せに対して比較をしている[21]．

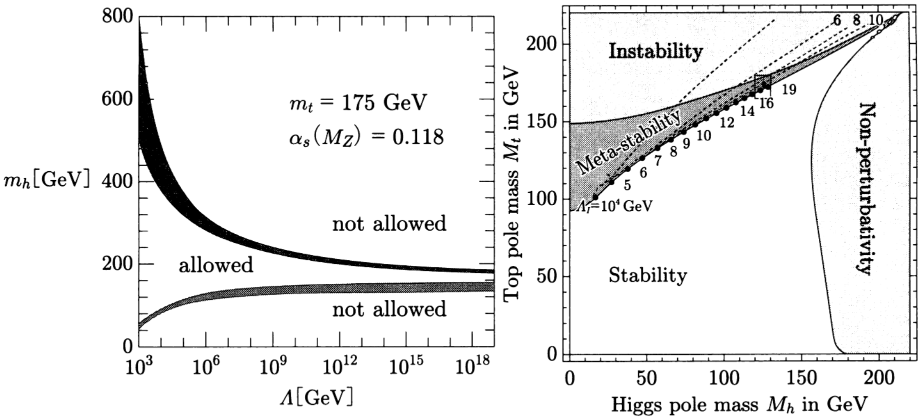


図 8.11　左：標準模型におけるヒッグス粒子質量とエネルギー・スケール Λ の相関[36].
右：ヒッグス粒子，トップ・クォーク質量と標準模型の真空の安定性[37].

に比例）が支配的であり，かつまた両者の相対符号は逆であることが知られている．そのため λ のスケール依存性は初期値によって大きく異なる．低エネルギースケールでの λ がある程度大きい値だと，エネルギーが増加するに従って λ も増加し，いずれ $\frac{\lambda}{4\pi} \geq 1$ となって摂動論が破綻してしまう．エネルギースケール毎に $\frac{\lambda}{4\pi} \geq 1$ とならない，という条件から低エネルギースケールでの λ の上限（即ちヒッグス粒子質量の上限）が定まる．

一方，λ が小さすぎる場合，エネルギースケールの増加に伴って λ は減少し，いずれ $\lambda < 0$ となってヒッグスポテンシャルが下から束縛されなくなり (unbounded from below という)，真空が不安定になる．このようにエネルギースケール毎に $\lambda < 0$ にならない，という条件から低エネルギーでの λ の下限（即ちヒッグス粒子質量の下限）が決められる．これをまとめたのが図 8.11（左）である[36]．この図から，発見されたヒッグス粒子質量 $m_h = 125\,\mathrm{GeV}$ は真空の不安定性条件によって制限される領域にあるように見える．

ヒッグス粒子質量と真空の安定性についてより詳しく調べた結果が図 8.11（右）である[37]．既知であるトップ・クォーク質量と，LHC で発見されたヒッグス粒子質量の関係および真空の安定性との相関を見ると，「安定 (stable)」である領域と「準安定 (meta-stable)」である領域の境界線上にあるように見える．つまり標準模型は安定な真空を持つのか，それとも完全に安定ではないものの，たまたま局所的に安定に見える（準安定）真空を持つのか，まだ定かではない．これが標準模型におけるヒッグス粒子質量 $m_h = 125\,\mathrm{GeV}$ が持つ意味である．

標準模型のヒッグスポテンシャル (8.15) が電弱対称性を自発的に破るためには質量パラメータ μ^2 が負，つまりスカラー場 ϕ が虚数の質量を持つことが条件であった．この言わば「タキオン的」な質量の存在をどう正当化できるだろうか．電弱対称性を自発的に破りたいために μ^2 を単なるパラメータと考え，

この符号が負であることを「人為的に選んだ」ようでなんだか気持が悪い（普通，質量項の符号はエネルギー運動量テンソル T^{μ}_{ν} の $\mu = \nu = 0$ 成分，即ちハミルトニアンが正になるように選ばれる）．虚数の質量パラメータを持つスカラー場など考えずに，電弱対称性を自発的に破ることはできないものだろうか．

そのような試みの一つとして，例えば (8.15) で $\mu^2 = 0$ としてみよう．電弱対称性が破られる前の標準模型のラグランジアンは全ての粒子が質量ゼロであるため，スカラーポテンシャルの μ^2 項以外は次元を持つ結合定数がない．従って $\mu^2 = 0$ とすることで標準模型のラグランジアンは古典的なスケール不変性を持つと言える．コールマン（S.R. Coleman）とワインバーグ（E.J. Weinberg）はこのようにツリーレベルで $\mu^2 = 0$ のスカラーポテンシャルに対する 1 ループの量子補正を求め，その補正項によって自発的対称性が起きることを指摘した[25]．

また，様々な動機から標準模型を拡張した「新しい物理模型」が提案されているが，その一つである標準模型に超対称性（supersymmetry, SUSY）を導入して拡張した模型での電弱対称性の破れはどうだろうか．本書の想定した範囲を越えるので詳しくは扱えないが，超対称性とはスピン半整数のフェルミオンとスピン整数のボソンの入れ替えに関する対称性である．この両者を入れ替える変換を超対称変換という．歴史的に超対称性は 1960 年代に宮沢弘成によってバリオン（スピン半整数のハドロン）とメソン（スピン整数のハドロン）の統一的理解のために導入された[23]．その後，重力を含む 4 つの基本相互作用の統一理論としての弦理論に適用され，また標準模型が内包する「ゲージ階層性問題」と呼ばれる深刻な問題を解決するために必要な性質として超対称性を導入した「最小超対称標準模型（Minimal supersymmetric SM, MSSM）」が提唱されるようになった．

超対称変換のもとで不変な理論はフェルミオンとボソンの自由度が等しい（だから入れ替えても変わらない）理論である．従って標準模型に超対称性を導入するとクォークやレプトン，ゲージボソンやヒッグス場に対してスピン量子数が半整数だけ異なる相棒（超対称粒子）が存在することになる．例えば電子（エレクトロン）e はスピン 1/2 のフェルミオンだが，その超対称粒子はスピン 0 のスカラーエレクトロンといい，$\tilde{e}$ で表す．そして超対称性は e と $\tilde{e}$ はスピン量子数だけが半整数異なり，それ以外の質量，電荷などは完全に等しいことを要請する．しかし実際には電子と同じ質量を持つスピン 0 の粒子は見つかっておらず，我々がアクセスできる世界では超対称性は破れていると考えざるを得ない．ただし破れていると言っても無造作に破れているのではなく「ゲージ階層性問題」を解決するために必要な性質は維持するような破れ方をしていると考える．これを「超対称性のソフトな破れ（soft supersymmetry breaking）」という．

MSSM のヒッグスポテンシャルは超対称性の要請から 2 種類のヒッグス場

(H_u, H_d) で構成される．標準模型のヒッグスポテンシャル (8.15) の μ^2 に相当するのは H_u, H_d の質量項である $m^2_{H_u}, m^2_{H_d}$ である．真空の安定性の条件（標準模型では (8.15) の $\lambda > 0$）やポテンシャルが $V = 0$ 以外に最小値を持つ条件などから $m^2_{H_u}$ と $m^2_{H_d}$ の値が異なること $(m^2_{H_u} \neq m^2_{H_d})$ が要請される．模型のインプットとして $m^2_{H_u} \neq m^2_{H_d}$ としてもよいのだが，もし $m^2_{H_u} = m^2_{H_d}$ としても量子効果によって $m^2_{H_u}$ は大きく影響され，特にトップ・クォークとの大きな湯川相互作用を通じて $m^2_{H_u} < m^2_{H_d}$（ときには $m^2_{H_u} < 0$）が実現される場合があることが知られている[26]．

このようにヒッグス粒子の発見および質量の決定はなされたが，真空の安定性の問題，そもそもヒッグスポテンシャルにおいて自発的に対称性が破られる理由，など標準模型の範囲内では理解できない問題が我々の目の前に積み上げられており，それらの理論的，実験的な解明が今後の課題である．

あとがき

本書では物理学において見出される対称性とその自発的破れについて紹介してきた．ランダウによる相転移の一般論から現象論的な超伝導模型であるギンツブルグ–ランダウ模型を扱い，微視的立場からその基礎づけを行った BCS 理論を解説した．BCS 理論における対称性（電荷の保存則）の破れの理解を目指した南部が到達した，対称性の自発的破れのアイデアとそれをカイラル対称性に適用した NJL 模型について紹介した．その中でゲージ対称性の自発的破れに伴い現れる南部–ゴールドストーン粒子がゲージボソンの縦波成分として「吸収」されることでゲージ不変性に矛盾することなくゲージボソンが質量を獲得する機構が理解された．この機構は今日「ヒッグス機構」と呼ばれている．そして自発的対称性の破れとヒッグス機構に基づく電磁相互作用と弱い相互作用の統一理論である素粒子の標準模型を紹介した．

超伝導現象や粒子の質量の生成起源などを研究する過程で，カイラル対称性を用いて対称性を自発的に破る一般的な方法は理解されたが，この方法が大きく開花したのは素粒子の標準模型においてであった．素粒子の標準模型は，単に素粒子の相互作用を統一的に理解するというに留まらず，多くの「予言」を与えるものであった．それは弱ゲージボソンである $W^{\pm}, Z$ 粒子の質量であり，それらとクォークやレプトンとの相互作用であり，そしてヒッグス粒子の存在であった．

本書の最後ではこれまでに行われた素粒子標準模型，特に電弱相互作用に対する検証，そして自発的対称性の破れとヒッグス機構検証の総仕上げであるヒッグス粒子の実験的探索に関して現状を紹介した．本稿で紹介したように LHC 実験においてヒッグス粒子はすでに発見され，その性質は標準模型が予言するものと無矛盾である．本稿執筆時点（2015 年 10 月）で LHC 実験は Run 2 と呼ばれる第二段階の実験を開始している．そこでは陽子同士の衝突エネルギーを Run 1 での 8 TeV から 13 TeV に上げ，かつて人類が実現したことのない高いエネルギーでの衝突実験による標準模型を越える未知粒子や未知の

現象の発見などが期待されている．一方，新現象というのはこれまでの物理学の歴史が示すように，あらゆる分野で，突然予想もしない形で我々の目の前に現れるものである．かつて超伝導現象の発見がそうであったように，素粒子，天文学，宇宙線，物性物理などあらゆる分野における新現象の発見があらたな対称性の破れのメカニズムの理解へと我々を誘うであろう．

蛇足とは思うが最後に，素粒子標準模型が成立した当時を少し振り返ってみよう．1967 年のワインバーグの論文 [30] は今から見ても完璧でかつシンプルであるのでコメントする余地はないが，レプトンのみに限定しハドロンは含まれていなかった．それはハドロンの取り扱いが（現在も同じであるが）難しかったからである．

一方サラムは 1958 年頃から，弱い相互作用と電磁相互作用をゲージ理論を用いて統一しようと，ウォード（ウォードの恒等式の著者）を共同研究者として多数の論文を書いた．この試みは元々シュウィンガー（S. Schwinger）が 1957 年に始めたものである[40]．サラムは常にレプトンに加えてハドロンを重視する姿勢を貫いたので，論文は必ずしもシンプルではない．1961 年には，1955 年に坂田昌一によって提案された (p, n, Λ) を基本粒子とし，ハドロンをその複合粒子とする「坂田模型（Sakata model）」[41]を用いて，SU(3) ゲージ理論として電弱相互作用を統一し始める[42]．1959 年前後，山口義夫（YY），池田峰夫–小川修三–大貫義郎（IOO）とベス（J. Wess）らが坂田模型を対称的に書き直す過程で導入した「SU(3) 対称性」[43]*1)に，サラムとウォードは触発されたのである．

当時，ハドロンの基本粒子 (p, n, Λ) と対をなして，レプトン (ν, e^-, μ^+) が $\mathrm{SU}(3)_F$ の基本表現（三重項）と考えられていた．しかし 1964 年 2 月にゲルマンがクォーク模型[44]を提唱する．これは $(u,\ d,\ s)$ クォークを基本粒子としてハドロンをその複合粒子とする模型であり，これが基本粒子の正しい選択であった．このクォーク模型を用いてサラム–ウォードが 1964 年に書いた論文[33]は，今日の Z^0 による中性カレント相互作用が含まれ，$\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ ゲージ理論に基づくものなので標準模型と同一であるが，ハドロンに関する電弱相互作用をクォークの複合粒子であるバリオンとメソンの八重項で記述したので少し分かりにくい．

実は 1968 年に行った講演[31]において，サラムはこの 1964 年に書いた論文のハドロンに関する部分は失敗していると述べている．なぜそんなことを言ったのだろうか？ サラム–ウォードの (ν, e^-, μ^+) 三重項において，ν は 4 成分のスピノールであり 2 成分スピノールの ν_{e_L} と $(\overline{\nu_\mu})_R$ を集めたものである．レプトンの三重項に 2 世代 (ν_e, e) と (ν_μ, μ) を詰め込んだのである．一方ハド

*1） 今日ではフレーバーに関する $\mathrm{SU}(3)_F$ 対称性と呼ばれる．

ロンの三重項は $(u,\ d,\ s)$ でありこちらは全て4成分のスピノールなので，第二世代のもう一つのクォークである c クォーク（charm quark）を導入する場所がない．当時 c クォークが存在するとは（更には $(u,\ d,\ s)$ クォークの存在すら）誰も考えていなかったのでその場所を用意する必要はなかった．実はこの c クォークを導入することなくして「フレーバーを変える中性カレント相互作用（Flavor Changing Neutral Current, FCNC）」現象を理解することは困難だったのである．これがサラムが「失敗した」と述べた理由である．更にサラムには，クォークからハドロン（バリオンとメソン）がどのように作られるかという理解も不充分であった．これが分かっていたのは1965年当時，南部陽一郎ただ一人であった[27]．南部はゲルマンのクォーク模型を検討する過程，いわゆる「韓–南部模型（Han-Nambu model）」[45]を構築する過程で，なぜクォークが3つ集まって (qqq) バリオンになり，クォークと反クォークが2つ集まって $(q\bar{q})$ メソンができるかを考えた．これを理解するためにクォークに3種類の色（南部はチャームと呼んだ）を導入して $\mathrm{SU}(3)_C$ ゲージ理論とすればよいと看破した．フレーバーに対する $\mathrm{SU}(3)_F$ 対称性ではなくそれと独立のカラーに対する $\mathrm{SU}(3)_C$ を用いたゲージ理論が強い相互作用を記述すると考えたのである．これが正しい理解であったことは10年後に分かることになる．

当時障害となっていたゲージボソンに質量を与える機構に関してサラムは，ヒッグス機構[32] を用いれば南部が言ったように，ゲージ対称性を保って「自己無撞着（self-consistent）」にゲージボソンの質量を決めることにすれば発散の困難は起きない（くりこみ可能）と考えた．この考えが正しいことはト・フーフト（'t Hooft）らによって1971年に証明された[39]．

一方グラショウは1961年にいち早く今日の標準模型と同じ相互作用に到達したが[29]，その論文にはゲージ理論という言葉が一切現れない．カレントの保存則を検討する過程で実質的に $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ ゲージ理論になることを示して，その結果として中性カレントを含めた標準模型の正しい相互作用に到達した．グラショウがゲージ理論を知らずにこの仕事をしたならば驚くべきことである．この論文を投稿して1年に満たない1961年に，おそらくはゲルマンの指導の下であろうが，一般のリー群を用いたゲージ理論とその応用に関する論文を書いて，ゲージ理論の言葉で電弱統一模型を論じた[46]．このときバリオンを $(p,\ n,\ \Lambda)$ として導入している．重力を含む一般のリー群を用いたゲージ理論は1956年に内山龍雄によってすでに準備されていた[47]．内山はヤンとミルズの1954年の論文[48]が出る以前から同じことをやっていたが出版が遅れた．そのためより一般化した理論を提出する必要があったのである．

さてサラムとウォードが乗り越えられなかったFCNCの問題は，グラショウ，イリオポウロス，マイアニ（GIM）[34]によって c クォークを導入して解決されたが，これは1970年のことである．その後1974年にいずれも米国のブルックヘブン国立研究所（BNL）とスタンフォード線形加速器研究センター

(SLAC) で行われた実験によって c クォークの複合粒子 $(c\bar{c})$ である J/ψ 粒子が発見されて[49] クォーク模型がようやく信じられるようになった．また，続く 1978 年に SLAC で行われた，偏極した電子と重陽子の衝突実験[50]によって，中性カレント相互作用の存在が実証された．そしてその直後に素粒子物理の理論家と実験家が一同に会して東京で開催された「高エネルギー国際会議 (ICHEP1978)」において素粒子の標準模型が確立したのである[51]．

この間の模型の構築において常に重要な役割を演じたのが「ゲルマン–西島の公式」(中野董夫–西島和彦 (1953)，ゲルマン (1953)) である[52]．電荷 Q をアイソスピンの第 3 成分 I_3 とそれと独立な U(1) 荷電であるハイパーチャージ (Y) の和として表す $Q = I_3 + Y$ という関係式である*2)．この関係式に $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ 群が内在していたのである．ストレンジネスを導入することによって，第二世代の粒子とその相互作用を分類した西島は，晩年ある祝賀会でのスピーチで，「神様から d と s は何かと問われて down と strange と答えたら，『それは違う，d は duck (あひる) で s は swan (白鳥) である』と教えられて夢から覚めた」と話した．

標準模型の確立には多くの優れた研究者が関与した．本書の後半で述べたようにその後も理論，実験共に急速に発展し，自然の神秘が次々と明らかにされている．本書を読んだ若者の中から，南部やサラムのような，次世代の物理学を牽引する優れた研究者が現れることを期待する．

*2) ここで $2Y = B + S$ であり，S はストレンジネス (strangeness)，B はバリオン数 (baryon number) である．ハドロンに付与するストレンジネス S は，現在の理解ではそのハドロンに含まれる s クォークの数の逆符号である．

付録 A
ファインマン・ルールとファインマン・ダイアグラム

古典論（ツリー・レベル）の範囲で素粒子散乱や崩壊過程を計算する際に便利な道具についてまとめておく．

A.1 場の演算子

場の量子論ではスカラー場，ディラック場そしてベクトル場はそれぞれ以下のように生成・消滅演算子で表される．

複素スカラー場

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}} \left(a_{\boldsymbol{k}} e^{-ikx} + b_{\boldsymbol{k}}^\dagger e^{ikx} \right) \tag{A.1}$$

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}} \left(a_{\boldsymbol{k}}^\dagger e^{ikx} + b_{\boldsymbol{k}} e^{-ikx} \right) \tag{A.2}$$

ディラック場

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}} \sum_\lambda \left\{ a_{\boldsymbol{k},\lambda} u(k,\lambda) e^{-ikx} + b_{\boldsymbol{k},\lambda}^\dagger v(k,\lambda) e^{ikx} \right\} \tag{A.3}$$

$$\overline{\psi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}} \sum_\lambda \left\{ a_{\boldsymbol{k},\lambda}^\dagger \overline{u}(k,\lambda) e^{ikx} + b_{\boldsymbol{k},\lambda} \overline{v}(k,\lambda) e^{-ikx} \right\} \tag{A.4}$$

ゲージ場

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}} \sum_\lambda \left\{ a_{\boldsymbol{k},\lambda} \epsilon_\mu(k,\lambda) e^{-ikx} + a_{\boldsymbol{k},\lambda}^\dagger \epsilon_\mu^*(k,\lambda) e^{ikx} \right\} \tag{A.5}$$

ここで $a_{\boldsymbol{k},\lambda}$ および $b_{\boldsymbol{k},\lambda}$ は運動量 k，ヘリシティ λ の粒子および反粒子の消滅演算子であり，$a_{\boldsymbol{k},\lambda}^\dagger$ および $b_{\boldsymbol{k},\lambda}^\dagger$ は同様に粒子および反粒子の生成演算子である．また $E_{\boldsymbol{k}}$ は粒子の質量を m として

$$E_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2} \tag{A.6}$$

である．

粒子および反粒子の生成消滅演算子は次の交換関係を満たすように規格化している：

複素スカラー場，ベクトル場

$$\left[a_{\boldsymbol{k},\lambda}, a^\dagger_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\right] = (2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \tag{A.7}$$

$$\left[b_{\boldsymbol{k},\lambda},\, b^\dagger_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\right] = (2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'). \tag{A.8}$$

ディラック場

$$\left\{a_{\boldsymbol{k},\lambda}, a^\dagger_{\boldsymbol{k}',\lambda}\right\} = (2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \tag{A.9}$$

$$\left\{b_{\boldsymbol{k},\lambda},\, b^\dagger_{\boldsymbol{k}',\lambda}\right\} = (2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'). \tag{A.10}$$

A.2 スピノールの規格化

ディラック場の u, v スピノールは

$$\overline{u}(k,\lambda)u(k,\lambda) = 2m, \quad \overline{v}(k,\lambda)v(k,\lambda) = -2m, \tag{A.11}$$

と規格化されており，射影演算子は

$$u(k,\lambda)\overline{u}(k,\lambda) = \not{k} + m, \quad v(k,\lambda)\overline{v}(k,\lambda) = \not{k} - m, \tag{A.12}$$

で与えられる．

A.3 ベクトル場の偏極和

質量 m のベクトル場の場合，偏極ベクトルの和は

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu(k,\lambda)\epsilon^*_\nu(k,\lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \tag{A.13}$$

で与えられる．ゲージ場（質量ゼロ）の場合は

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu(k,\lambda)\epsilon^*_\nu(k,\lambda) \;=\; -g_{\mu\nu} + \frac{k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu}{k\cdot n}, \tag{A.14}$$

ここで 4 元ベクトル n^μ はゲージ場の物理的成分（横波成分）を取り出すために導入され，$n^2 = 0$ かつ $k\cdot n \neq 0$ である．例えば $k^\mu = (E, \boldsymbol{k})$ に対して $n^\mu = (1, -\boldsymbol{1})$ でよい．

A.4 外線粒子のファインマン・ルール

ファインマン・ダイアグラムでは，複数の粒子による相互作用が起きる点を

バーテックス（vertex）もしくは相互作用頂点と呼ぶ．バーテックスで相互作用する粒子のうち，4 元運動量 p が質量 m と $p^2 = m^2$ の関係を満たす状態にある粒子を質量殻上の粒子（on-shell）と呼び，そうでない状態にある粒子を仮想粒子（virtual もしくは off-shell）と呼ぶ．質量殻上の粒子をファインマン・ダイアグラムでは外線粒子，仮想粒子を内線粒子という．ここでは先ず外線粒子のファインマン・ルールについてまとめる．

場の量子論では運動量とヘリシティが $(\boldsymbol{k}, \lambda)$ の粒子が 1 ついる状態を粒子の生成演算子を用いて

$$|\boldsymbol{k}, \lambda\rangle = a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle \tag{A.15}$$

で表す．$|0\rangle$ は真空を表し，消滅演算子によって

$$a_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} = 0 \tag{A.16}$$

となる．始状態にあった $(\boldsymbol{p}, \lambda)$ の粒子が相互作用によって別の運動量を持つ粒子になったとしよう．相互作用ラグランジアンの中の複素スカラー場 $\phi(x)$ を用いて

$$\phi(x)|\boldsymbol{k}, \lambda\rangle = \phi(x)a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle \tag{A.17}$$

を計算する．スカラー場はヘリシティ λ を持たないが，当面単なる記号として置いておこう．すると (A.1) によって

$$\phi(x)a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}}\left(a_{\boldsymbol{p},\lambda'}e^{-ipx} + b^\dagger_{\boldsymbol{p},\lambda'}e^{+ipx}\right)a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle \tag{A.18}$$

となるが，(A.7) によって

$$\begin{aligned}\phi(x)a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}}e^{-ipx}a_{\boldsymbol{p},\lambda'}a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}e^{-ipx}(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}\delta_{\lambda\lambda'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})|0\rangle \\ &= e^{-ikx}|0\rangle\end{aligned} \tag{A.19}$$

となる．最後の e^{-ikx} は終状態に同様に現れる因子らとディラックの δ 関数を構成し，始状態，終状態間の運動量保存則を保証する．よってこの因子を除けば運動量 $\boldsymbol{k}$ を表す外線複素スカラー場のファインマン・ルールは 1 であることが分かる．

ディラック場の場合は生成消滅演算子にスピノール u, v などが掛かっているため，上と同様の操作をすると始状態に運動量とヘリシティが (k, λ) の粒子がいる場合は

$$\psi(x)a^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle = u(k,\lambda)e^{-ikx}|0\rangle \tag{A.20}$$

となるため，相互作用点に向かっていく粒子のファインマン・ルールは $u(k, \lambda)$

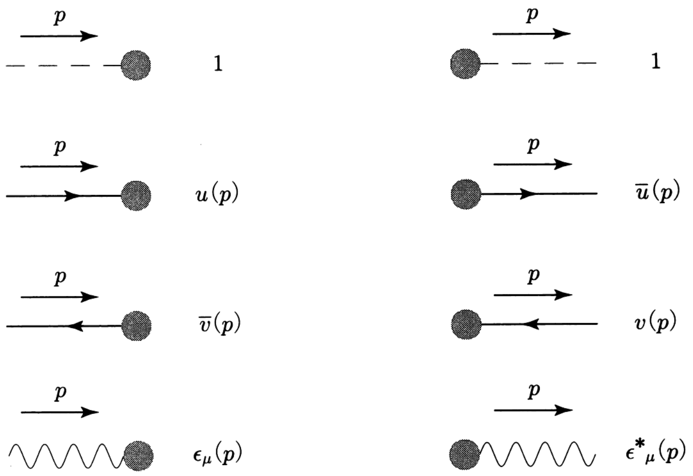


図 A.1　運動量 p を持つ外線粒子に対するファインマン・ルール．左側は相互作用点（バーテックス）に向けて入ってくる（incoming）粒子，右側は出ていく（outgoing）粒子を表す．上からスピン 0, $\frac{1}{2}$, 1 の各粒子を表す．

となる．反粒子が始状態にある場合は

$$\overline{\psi}(x)b^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle = \overline{v}(k,\lambda)e^{-ikx}|0\rangle \tag{A.21}$$

となるので $\overline{v}(k,\lambda)$ が相互作用頂点に向っていく（incoming）反フェルミオンのファインマン・ルールとなる．相互作用頂点から出て行く（outgoing）フェルミオンと反フェルミオンについてはそれぞれ

$$\langle 0|a_{\boldsymbol{k},\lambda}\overline{\psi}(x) = \langle 0|e^{ikx}\overline{u}(k,\lambda), \quad \langle 0|b_{\boldsymbol{k},\lambda}\psi(x) = \langle 0|e^{ikx}v(k,\lambda), \tag{A.22}$$

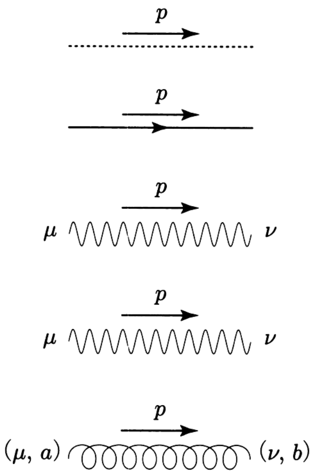
となるので，$\overline{u}(k,\lambda)$ および $v(k,\lambda)$ がファインマン・ルールとなる．

ベクトル場の場合は質量の有無によらず，ディラック場のスピノール u, v の代わりに偏極ベクトル $\epsilon_\mu(k,\lambda)$ を用いる．つまり相互作用頂点に入っていくベクトル粒子には $\epsilon_\mu(k,\lambda)$，出て行くベクトル粒子には $\epsilon^*_\mu(k,\lambda)$ がファインマン・ルールとなる．

以上の結果を図 A.1 にまとめる．破線はスピン 0（スカラー）粒子を表す．実線はフェルミ（スピン $\frac{1}{2}$）粒子を表すが運動量の向きと実線上の矢印の向きが平行な場合は粒子，反平行の場合は反粒子を表す．ベクトル（スピン 1）粒子は質量の有無に依らずファインマン・ルールは共通である．一般には波線で表すが，グルーオンの場合はぐるぐる巻きの線で表す（図 A.1 では省略している）．

A.5　プロパゲーターのファインマン・ルール

プロパゲーターに対するファインマン・ルールを図 A.2 にまとめる．上か



$$\frac{i}{p^2-m^2}$$

$$\frac{i}{\not{p}-m}$$

$$\frac{i}{p^2}\left\{-g^{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right\}$$

$$\frac{i}{p^2-m^2}\left\{-g^{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2-\xi m^2}\right\}$$

$$\frac{i}{p^2}\left\{-g^{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right\}\delta_{ab}$$

図 A.2 プロパゲーターに対するファインマン・ルール．上からスカラー粒子，フェルミオン，フォトン，質量を持つベクトルボソン，グルーオンのプロパゲーターを表す．

らスカラー粒子，フェルミオン，フォトン，質量を持つベクトルボソン（つまり $W^\pm, Z$ ボソン），グルーオンである．(μ,ν) はローレンツベクトルの足を表し，(a,b) はカラーの足を表す．ゲージ固定パラメータ ξ の選び方は多々あるが，例えば

$$\begin{aligned}\xi &= 1 \quad \text{ト・フーフト–ファインマン（'t Hooft-Feynman）ゲージ}\\ &= 0 \quad \text{ランダウ・ゲージ}\\ &= \infty \quad \text{ユニタリ・ゲージ（質量を持つベクトルボソン）}\end{aligned} \tag{A.23}$$

である．

A.6 相互作用バーテックスのファインマン・ルール

相互作用バーテックスのファインマン・ルールについては本文中にも紹介したが，ここでもう少し詳しいものを与えよう．素粒子標準模型では，相互作用はスカラー粒子 (S)，フェルミオン (F)，ベクトル粒子 (V) の間のものに限定される．くりこみ可能な範囲では表 A.1 にまとめた 9 種類である[38]．

表 A.1 くりこみ可能な相互作用バーテックスの種類．

FFV	FFS	VVV
VVS	SSV	SSS
$VVVV$	$VVSS$	$SSSS$

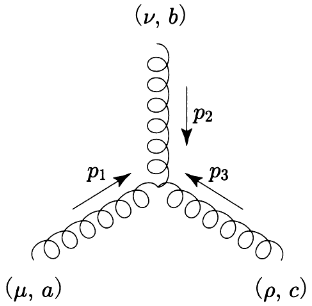
A.6.1 VVV

ベクトル粒子の 3 点バーテックスはベクトル場の運動項

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}V^{a\,\mu\nu}V^{a}_{\mu\nu}, \tag{A.24}$$

$$V^{a}_{\mu\nu} = \partial_\mu V^a_\nu - \partial_\nu V^a_\mu - g f^{abc} V^b_\mu V^c_\nu \tag{A.25}$$

から得られる．微分 (∂_μ) を含むので第 5 章の 5.5 で述べたようにこれを粒子の運動量に置き換える．3 つの粒子全てが相互作用点（バーテックス）に向かう方向の運動量を持つとしたときのファインマン・ルールは以下のとおりである．外向きの場合は運動量の符号を変えればよい．

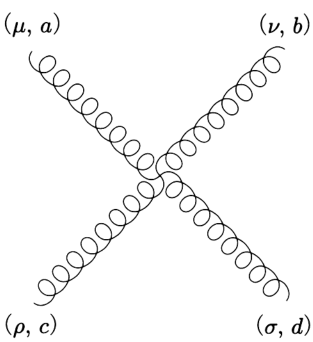


$$-g f^{abc}\left\{(p_1-p_2)^\rho g^{\mu\nu} + (p_2-p_3)^\mu g^{\nu\rho} + (p_3-p_1)^\nu g^{\mu\rho}\right\}$$

グルーオンの場合のファインマン・ルールでは，f^{abc} および結合定数 g を SU(3) 群の構造定数，ゲージ結合定数とすればよい．$\mathrm{SU}(2)_L$ ゲージボソン (W^1, W^2, W^3) の場合のファインマン・ルールは f^{abc} および結合定数 g を SU(2) 群の構造定数（完全反対称テンソル ϵ^{abc}），SU(2) ゲージ結合定数とすればよい．電弱ゲージボソンの質量固有状態 $(W^\pm, Z, A)$ に直すには (6.45), (6.49) を用いれば，W^+-W^--A および W^+-W^--Z の場合のファインマン・ルールが直ぐに得られる．

A.6.2 $VVVV$

ベクトル粒子の 4 点バーテックスも，ベクトル場の運動項 (A.25), (A.24) から得られる．



$$-ig^2\left\{f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})\right\}$$

グルーオンの場合，および $\mathrm{SU}(2)_L$ ゲージボソンの場合は群の構造定数 f^{abc} と結合定数 g を適宜，対応するゲージ群のものに置き換えればよい．電弱ゲージボソンの質量固有状態 $(W^{\pm}, Z, A)$ では W^+-W^--A-A, W^+-W^--Z-Z, W^+-W^--A-Z の相互作用がある．

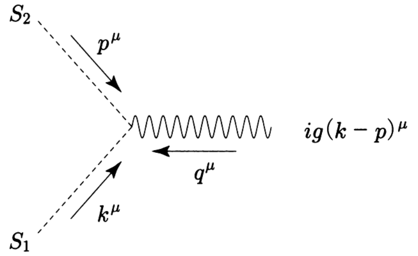
A.6.3 *SSV*

SSV 相互作用は次のラグランジアンで与えられる（素粒子標準模型ではヒッグス場の共変微分項から現れる）：

$$\mathcal{L} = ig^{S_1 S_2 V} S_1^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu S_2 V^\mu, \tag{A.26}$$

$$S_1^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu S_2 \equiv (\partial_\mu S_1^*) S_2 - S_1^* (\partial_\mu S_2). \tag{A.27}$$

2 つのスカラー場 S_1, S_2 がそれぞれ運動量 k, p で相互作用点へと向かう場合，$S_1^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu S_2 \sim -i(k-p)_\mu S_1^* S_2$ となるのでファインマン・ルールは（$i \times \mathcal{L}$ より）次のようになる．



A.6.4 その他のバーテックス

これまで扱った *VVV*, *VVVV*, *SSV* 以外のバーテックスは相互作用に微分を含まないため，そのファインマン・ルールは自明である．それぞれの相互作用ラグランジアンを与え，ファインマン・ルールを図 A.3 にまとめる．

FFV:	$\mathcal{L} = g_\alpha^{F_1 F_2 V} \overline{F_1} \gamma^\mu P_\alpha F_2 V_\mu$	***VVS***:	$\mathcal{L} = g^{S_1 V_2 V_3} S_1 V_{2\mu}^\dagger V_3^\mu$
FFS:	$\mathcal{L} = g_\alpha^{F_1 F_2 S} \overline{F_1} P_\alpha F_2 S$	***SSS***:	$\mathcal{L} = g^{S_1 S_2 S_3} S_1^* S_2 S_3$
SSVV:	$\mathcal{L} = g^{S_1 S_2 V_3 V_4} S_1^* S_2 V_3^{\mu\dagger} V_{4\mu}$	***SSSS***:	$\mathcal{L} = g^{S_1 S_2 S_3 S_4} S_1^* S_2 S_3^* S_4$

バーテックスに複数のスカラー場が現れる場合には注意が必要である．もし n 個の同一スカラー場がバーテックスにある場合，ファインマン・ルールは全て別のスカラー場である場合のファインマン・ルールを $\frac{1}{n!}$ で割らなくてはならない．同一粒子の寄与を重複して数えてしまう（over counting）のを避けるためである．

A.6.5 ゴースト場

最後に，本文ではあからさまに扱わなかったが，QCD では理論のユニタリ

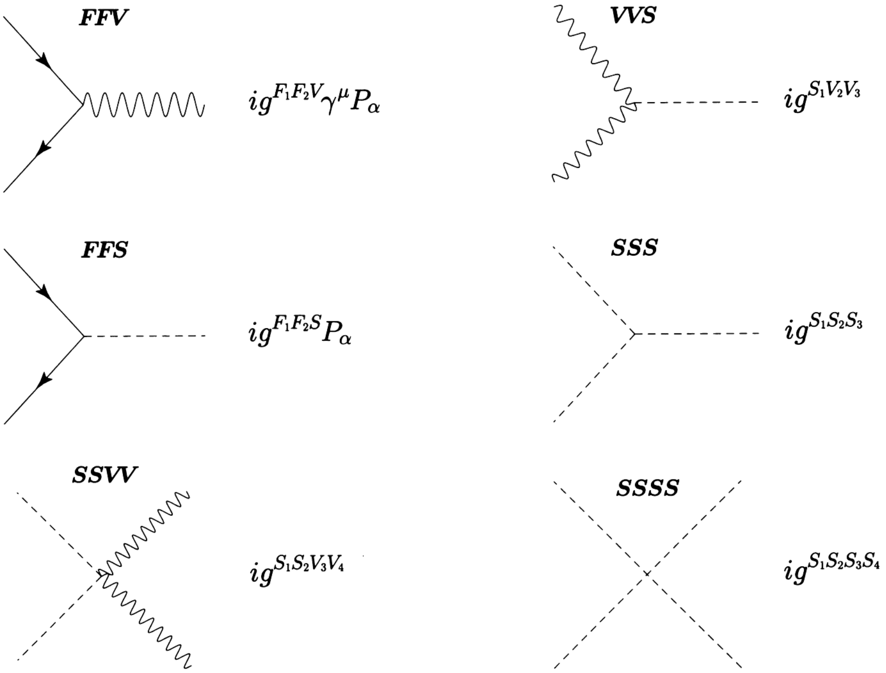


図 A.3

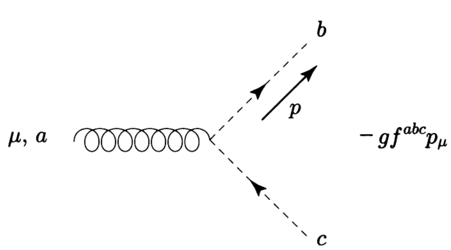
ティを保証するため，ゴースト場 η というフェルミ統計にしたがうスカラー場の寄与がある．そのラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial_\mu \overline{\eta}^a)\,(D^\mu)^{ab}\,\eta^b \\ &= (\partial_\mu \overline{\eta}^a)\left(\delta^{ab}\partial^\mu + gf^{cab}A^c_\mu\right)\eta^b.\end{aligned} \tag{A.28}$$

ここで共変微分 D^μ に現れる生成子を $(T^a)_{bc} = -if^{abc}$ とした．右辺第 1 項よりゴースト場のプロパゲーターが得られる．第 2 項からはゴースト対とグルーオンの相互作用が得られる．カラーの足を並べ替えて相互作用ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = gf^{abc}A^{a\mu}\partial_\mu \overline{\eta}^b \eta^c \tag{A.29}$$

となる．カラーの足 b を持つゴースト場が持ち出す運動量を p としたときのファインマン・ルールは次の通りである．



参考文献

[1] 弥永昌吉著「ガロアの時代　ガロアの数学」（第一部，第二部）（2002）シュプリンガーフェアラーク東京．この本にガロアの原論文の翻訳および解説がある．

[2] L.D. Landau, "On the theory of phase transitions", JETP 7 (1937) 19, 627.
ランダウ−リフシッツ著理論物理学教程の「量子力学」および「統計力学」（東京図書）も併せて参照されたい．

[3] L.D. Landau and V.L. Ginzburg, "On the theory of superconductivity", JETP 20 (1950) 1064.

[4] R.P. Feynman, "Space-time approach to no -relativistic quantum mechanics", Rev. Mod. Phys. 20 (1945) 367.

[5] H. Weyl, "Space-Time-Matter" (1952) Dover Publication. 内山龍雄による日本語訳がある．

[6] J. Bardeen, L.N. Cooper and J.R. Schrieffer, "Microscopic theory of super conductivity", Phys. Rev. 106 (1957) 162; "Theory of superconductivity", Phys. Rev. 108 (1957) 1175.

[7] N.N. Bogoliubov, JETP **34** (1958) 41, 51. 論文は見られなかったが，C. Kittel "Quantum Theory of Solids" (1963) John Wiley and Sons に解説がある．この本及び同じ著者による「固体物理学入門」（上下）丸善から超伝導に関する多くのことが学べる．

[8] Y. Nambu, "Quasi-particles and gauge invariance in the theory of superconductivity", Phys. Rev. 117, (1960) 648.

[9] Y. Nambu, "A 'superconcuctor' model of elementary particles and its consequences", in the proceedings of the midwest conference, April (1960). "Broken Symmetry, selected papers of Y. Nambu", ed. by T. Eguchi and K. Nishijima, World Scientific (1995) の中に再録されている．

[10] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Dynamical model of elementary particles based on an analogy whith superconductivity I, Phys. Rev. 122 (1961) 345; II i.b.d. 124 (1961) 246.

[11] L.B. Okun, "Leptons and Quarks" (1982). 素粒子の理解にとても役立つ本である．Appendix にフィルツの恒等式とその導出法が説明されている．

[12] 坂本眞人著「量子力学から超対称性へ」臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ−96（サイエンス社，2012）の 7.3 節「グラスマン数とその性質」を参照されたい．

[13] G. 't Hooft, Renormalization of massless Yang-Mills fields", Nucl. Phys. B33 (1971) 173. くりこみ理論への WI の活用．

[14] M. Kobayashi, K. Seo and A. Sugamoto, "Commutator anomaly for the Gauss law constraint operator", Nucl. Phys. B273 (1986) 607. カイラルアノマリー（量子異常）への WI の活用．赤外発散への活用に関してはこの論文の文献を参照されたい．

[15] S. Schael *et al.*, "Precision electroweak measurements on the Z resonance," Phys. Rept.

427, 257 (2006) [hep-ex/0509008].

[16] G.C. Cho, K. Hagiwara, Y. Matsumoto and D. Nomura, JHEP **1111**, 068 (2011) [arXiv:1104.1769 [hep-ph]].

[17] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], Phys. Lett. B **716**, 1 (2012) [arXiv:1207.7214 [hep-ex]].

[18] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], Phys. Lett. B **716**, 30 (2012) [arXiv:1207.7235 [hep-ex]].

[19] `https://atlas.web.cern.ch/Atlas/GROUPS/PHYSICS/PAPERS/HIGG-2012-27`

[20] V. Khachatryan *et al.* [CMS Collaboration], Eur. Phys. J. C **75**, no.5, 212 (2015) [arXiv:1412.8662 [hep-ex]].

[21] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], arXiv:1506.05669 [hep-ex].

[22] S. Heinemeyer *et al.* [LHC Higgs Cross Section Working Group Collaboration], arXiv:1307.1347 [hep-ph].

[23] H. Miyazawa, Prog. Theor. Phys. **36**, no.6, 1266 (1966).

[24] J. Hisano and K. Tsumura, Phys. Rev. D **87**, 053004 (2013) [arXiv:1301.6455 [hep-ph]].

[25] S.R. Coleman and E.J. Weinberg, Phys. Rev. D **7**, 1888 (1973).

[26] K. Inoue, A. Kakuto, H. Komatsu and S. Takeshita, Prog. Theor. Phys. **68**, 927 (1982) [Prog. Theor. Phys. **70**, 330 (1983)];
L.E. Ibanez and G.G. Ross, Phys. Lett. B **110**, 215 (1982);
J.R. Ellis, D.V. Nanopoulos and K. Tamvakis, Phys. Lett. B **121**, 123 (1983);
L. Alvarez-Gaume, J. Polchinski and M.B. Wise, Nucl. Phys. B **221**, 495 (1983).

[27] Y. Nambu, A Systematics of Hadrons in Subnuclear Physics, Preludes in Theoretical Physics, eds. A. De-Shalit, H. Feshbach and L. van Hove (North-Holland), 133 (1966).

[28] "The Nobel Prize in Physics 2004 - Advanced Information". Nobelprize.org. Nobel Media AB 2014. Web. 28 Oct 2015, `<http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2004/advanced.html>`

[29] S.L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).

[30] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).

[31] A. Salam, *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm (Almquist and Wiksells, Stockholm, 1968), 367.

[32] F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964);
P.W. Higgs, Phys. Lett. **12**, 132 (1964);
G.S. Guralnik, C.R. Hagen and T.W.B. Kibble, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964).

[33] A. Salam and J.C. Ward, Phys. Lett. **13**, 168 (1964).

[34] S.L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. D **2**, 1285 (1970).

[35] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).

[36] A. Djouadi, Phys. Rept. **457**, 1 (2008) [hep-ph/0503172].

[37] D. Buttazzo, G. Degrassi, P.P. Giardino, G.F. Giudice, F. Sala, A. Salvio and A. Strumia,

JHEP **1312**, 089 (2013) [arXiv:1307.3536 [hep-ph]].

[38] HELAS: HELicity Amplitude Subroutines for Feynman Diagram Evaluations, H. Murayama, I. Watanabe and K. Hagiwara, KEK Report 91–11 (1992).

[39] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **33**, 173 (1971); B **35**, 167 (1971).

[40] J.S. Schwinger, Annals Phys. **2**, 407 (1957).

[41] S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **16**, 686 (1956).

[42] A. Salam and J.C. Ward, Nuovo Cim. **10**, 1731 (1961).

[43] Y. Yamaguchi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **11**, 1, 37 (1959);
M. Ikeda, S. Ogawa and Y. Ohnuki, Prog. Theor. Phys. **22**, 715 (1959);
J. Wess, Nuovo Cim. **10**, 15 (1960).

[44] M. Gell-Mann, Phys. Lett. 8 (1964) 118.

[45] M.Y. Han and Y. Nambu, Phys. Rev. **139**, B1006 (1965).

[46] S.L. Glashow and M. Gell-Mann, Annals Phys. **15**, 437 (1961).

[47] R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).

[48] C.N. Yang and R.L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).

[49] J.J. Aubert *et al.* [E598 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **33**, 1404 (1974);
J.E. Augustin *et al.* [SLAC-SP-017 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **33**, 1406 (1974).

[50] C.Y. Prescott *et al.*, Phys. Lett. B **77**, 347 (1978); B **84**, 524 (1979).

[51] Proc. of the 19th International Conference on High Energy Physics, ed. by S. Homma, M. Kawaguchi and H. Miyazawa, Physical Society of Japan 1979.

[52] T. Nakano and K. Nishijima, Prog. Theor. Phys. **10**, 581 (1953);
K. Nishijima, Prog. Theor. Phys. **13**, 285 (1955);
M. Gell-Mann, Phys. Rev. **92**, 833 (1953); Nuovo Cim. Suppl. **4**, 848 (1956).

索　引

欧字

ア

カ

サ

タ

著 者 略 歴

菅本 晶夫
すが もと あき お

1973 年　京都大学理学部物理学科卒業
1978 年　東京大学大学院理学系研究科博士課程修了, 理学博士
1978 年　東京大学原子核研究所研究員
1979 年　高エネルギー物理学研究所理論部助手
　　　　1981 年–1983 年：シカゴ大学 Robert R. McCormick fellow
1987 年　お茶の水女子大学理学部助教授, 1992 年 同教授
現　在　お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科教授
専　門　素粒子物理学

曺 基哲
Cho Gi Chol

1990 年　朝鮮大学校理学部卒業
1996 年　東海大学大学院理学研究科修了．博士（理学）
　　　　高エネルギー加速器研究機構（日本学術振興会特別研究員）等を経て
2000 年　お茶の水女子大学理学部講師
2011 年　お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科教授
　　　　現在に至る.
専　門　素粒子物理学

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ - 121

『対称性の自発的破れ
　基礎からランダウ理論，南部理論，標準模型，ヒッグス粒子まで』

著　者　菅本 晶夫・曺 基哲

2016 年 1 月 25 日　初版発行

数 理 科 学 編 集 部　　　　発行人 森　平　敏　孝

TEL. (03) 5474–8816

FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp

ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで.　　　　表紙デザイン：長谷部貴志

発行所 ©　株式会社 サイエンス社　　TEL. (03) 5474–8500（代表）

〒151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁